

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. siječnja 2015.

4. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$$\begin{aligned} 2015 - 5 \cdot (25 \cdot 13 + 13 + 3 \cdot 25 - 10) &= 2015 - 5 \cdot (325 + 13 + 75 - 10) = & 1 \text{ BOD} \\ &= 2015 - 5 \cdot (338 + 75 - 10) = & 1 \text{ BOD} \\ &= 2015 - 5 \cdot (413 - 10) = & 1 \text{ BOD} \\ &= 2015 - 5 \cdot 403 = & 1 \text{ BOD} \\ &= 2015 - 2015 = & 1 \text{ BOD} \\ &= 0 & 1 \text{ BOD} \end{aligned}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$$\begin{aligned} 2015 - 5 \cdot (25 \cdot 13 + 13 + 3 \cdot 25 - 10) &= \\ &= 2015 - 5 \cdot (25 \cdot 13 + 13 + 75 - 10) = 2015 - 5 \cdot (25 \cdot 13 + 13 + 65) = & 1 \text{ BOD} \\ &= 2015 - 5 \cdot (25 \cdot 13 + 1 \cdot 13 + 5 \cdot 13) = & 1 \text{ BOD} \\ &= 2015 - 5 \cdot 13 \cdot (25 + 1 + 5) = & 1 \text{ BOD} \\ &= 2015 - 5 \cdot 13 \cdot 31 = & 1 \text{ BOD} \\ &= 2015 - 2015 = & 1 \text{ BOD} \\ &= 0 & 1 \text{ BOD} \end{aligned}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Traženi umnožak je $2367 \cdot 357 = 845019$. 2 BODA

U umnošku je 5 znamenki širine po 6 mm i 1 znamenka širine 2 mm pa je njihova širina

$$5 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 32 \text{ mm.} \quad \text{2 BODA}$$

Između 6 znamenaka je 5 razmaka čija je ukupna širina $5 \cdot 1 = 5 \text{ mm}$. 1 BOD

Ukupna širina umnoška 845019 iznosi $32 + 5 = 37 \text{ mm}$. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Iz 3. jednakosti slijedi $\heartsuit + 7 + 7 + 7 = 30$ pa je $\heartsuit = 9$. 1 BOD

Iz 2. jednakosti slijedi $\star + 7 + \star + 7 = 20$ pa je $\star = 3$. 2 BODA

Iz 1. jednakosti slijedi $9 + 3 + 9 + 7 = \square$ pa je $\square = 28$. 1 BOD

Iz 4. jednakosti slijedi $\diamond + 3 + \diamond + 9 = 24$ pa je $\diamond = 6$. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja donose po 1 bod.

4. Prvi način:

Ako bi svaki broj imao po 40 listova, komplet bi imao $6 \cdot 40 = 240$ listova. 2 BODA

Da bi ukupan broj listova u kompletu bio 260 listova, morali bi dodati $260 - 240 = 20$ listova.

2 BODA

Kako je $44 - 40 = 4$ i $20 : 4 = 5$, godišnji komplet će imati 260 listova ako je 5 brojeva s po

44 lista i 1 broj s 40 listova. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Ako bi svaki broj imao po 44 lista, komplet bi imao $6 \cdot 44 = 264$ lista. 2 BODA

Da bi ukupan broj listova u kompletu bio 260 listova, morali bi oduzeti $264 - 260 = 4$ lista.

2 BODA

Kako je $44 - 40 = 4$ i $4 : 4 = 1$, godišnji komplet će imati 260 listova ako je 1 broj s 40 listova i 5 brojeva s po 44 lista.

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja vrijedi 2 boda.

5. Broj 62 se dobije zamjenom znamenaka što znači da je dobiven od broja 26. 1 BOD

Broj 26 je dobiven prepolavljanjem pa je dobiven od broja $26 \cdot 2 = 52$. 2 BODA

Broj 52 je dobiven dodavanjem broja 15 pa je dobiven od broja $52 - 15 = 37$. 2 BODA

Broj 37 je dobiven od zamišljenog zamjenom znamenaka, a to znači da je zamišljeni broj 73.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja vrijedi 2 boda.

6. Pravokutnici su: *ABNO*, *ACMO*, *ADLO*, *AEKO*,

BCMN, *BDLN*, *BEKN*

CDLM, *CEKM*

DEKL

po 1 BOD za svaki pravokutnik

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:

Ukupna vrijednost kovanica od 2 kune je $248 \cdot 2 = 496$ kuna, 1 BOD

kovanica od 1 kune je $189 \cdot 1 = 189$ kuna, 1 BOD

kovanica od 50 lipa je $87 \cdot 50 = 4350$ lipa odnosno 43 kune i 50 lipa, 1 BOD

kovanica od 20 lipa je $45 \cdot 20 = 900$ lipa odnosno 9 kuna 1 BOD

i kovanica od 10 lipa je $35 \cdot 10 = 350$ lipa odnosno 3 kune i 50 lipa. 1 BOD

Ukupno to iznosi 741 kunu. 3 BODA

Kako je $741 : 3 = 247$, prodano je 247 šalica čokolade. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Ukupna vrijednost kovanica od 2 kune je $248 \cdot 2 = 496$ kn = 49600 lp, 1 BOD

kovanica od 1 kune je $189 \cdot 1 = 189$ kn = 18900 lp, 1 BOD

kovanica od 50 lipa je $87 \cdot 50 = 4350$ lp, 1 BOD

kovanica od 20 lipa je $45 \cdot 20 = 900$ lp 1 BOD

i kovanica od 10 lipa je $35 \cdot 10 = 350$ lp. 1 BOD

Ukupno to iznosi 74100 lipa. 3 BODA

Kako je 3 kn = 300 lp i $74100 : 300 = 247$, prodano je 247 šalica čokolade. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. siječnja 2015.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$$\begin{aligned} 149 \cdot 76 - (55 - 5 \cdot 3) \cdot (100 - 6 \cdot 4) + 76 \cdot 291 &= \\ = 149 \cdot 76 - (55 - 15) \cdot (100 - 24) + 76 \cdot 291 &= & 1 \text{ BOD} \\ = 149 \cdot 76 - 40 \cdot 76 + 76 \cdot 291 &= & 1 \text{ BOD} \\ = 76 \cdot (149 - 40 + 291) &= & 1 \text{ BOD} \\ = 76 \cdot (109 + 291) &= & 1 \text{ BOD} \\ = 76 \cdot 400 &= & 1 \text{ BOD} \\ = 30\,400 & & 1 \text{ BOD} \end{aligned}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$$\begin{aligned} 149 \cdot 76 - (55 - 5 \cdot 3) \cdot (100 - 6 \cdot 4) + 76 \cdot 291 &= \\ = 149 \cdot 76 - (55 - 15) \cdot (100 - 24) + 76 \cdot 291 &= & 1 \text{ BOD} \\ = 149 \cdot 76 - 40 \cdot 76 + 76 \cdot 291 &= & 1 \text{ BOD} \\ = 11324 - 3040 + 22116 &= & 2 \text{ BODA} \\ = 8284 + 22116 &= & 1 \text{ BOD} \\ = 30400 & & 1 \text{ BOD} \end{aligned}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Prirodni broj je neparan ako mu je znamenka jedinice 1, 3, 5, 7 ili 9. 1 BOD

Da bi broj bio najmanji mogući znamenke mu trebaju biti 1 i 0, a da bi bio najveći mogući znamenke mu trebaju biti 9 i 8. 1 BOD

Najmanji peteroznamenkasti neparni prirodni broj kojemu su 3 znamenke neparne, a 2 parne je broj 10011. 2 BODA

Najveći peteroznamenkasti neparni prirodni broj kojemu su 3 znamenke neparne, a 2 parne je broj 99889. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja donose po 2 boda.

3. Prvi način:

Ako podijelimo umnožak sva tri broja s umnoškom prvog i trećeg broja, dobit ćemo drugi broj.
Drugi broj je $13600 : 544 = 25$. 2 BODA
Ako podijelimo umnožak sva tri broja s umnoškom drugog i trećeg broja, dobit ćemo prvi broj.
Prvi broj je $13600 : 425 = 32$. 2 BODA
Traženi umnožak prvog i drugog broja je $32 \cdot 25 = 800$. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Ako je a prvi broj, b drugi broj, a c treći broj, onda vrijedi
 $a \cdot b \cdot c = 13600$
 $a \cdot c = 544$ 1 BOD
 $b \cdot c = 425$.
Iz 1. i 2. jednakosti slijedi $544 \cdot b = 13600$ odnosno $b = 13600 : 544 = 25$. 2 BODA
Iz 1. i 3. jednakosti slijedi $425 \cdot a = 13600$ odnosno $a = 13600 : 425 = 32$. 2 BODA
Traženi umnožak prvog i drugog broja je $a \cdot b = 32 \cdot 25 = 800$. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Ako je a prvi broj, b drugi broj, a c treći broj, onda vrijedi

$$a \cdot b \cdot c = 13600$$

$$a \cdot c = 544$$

1 BOD

$$b \cdot c = 425.$$

Kako je $13600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17$, $544 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17$ i $425 = 5 \cdot 5 \cdot 17$, 2 BODA

onda vrijedi

$$a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17$$

$$a \cdot c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17$$

$$b \cdot c = 5 \cdot 5 \cdot 17.$$

Slijedi $b = 5 \cdot 5 = 25$ i $a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

2 BODA

Traženi umnožak prvog i drugog broja je $a \cdot b = 32 \cdot 25 = 800$.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. Broj je djeljiv s 3 ako je zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 3 pa je

zbroj $9 + a + 6 + b + 9 = 24 + a + b$ djeljiv s 3.

1 BOD

Kako su a i b prosti brojevi, onda su $a, b \in \{2, 3, 5, 7\}$.

Za $a = 2$ imamo da je $26 + b$ djeljiv s 3 pa je $b = 7$.

1 BOD

Za $a = 3$ imamo da je $27 + b$ djeljiv s 3 pa je $b = 3$.

1 BOD

Za $a = 5$ imamo da je $29 + b$ djeljiv s 3 pa je $b = 7$.

1 BOD

Za $a = 7$ imamo da je $31 + b$ djeljiv s 3 pa je $b \in \{2, 5\}$.

1 BOD

Traženi brojevi su 92679, 93639, 95679, 97629, 97659.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja donose 4 boda.

5. Prvi način:

Na dužini $\overline{AB}$ istaknuto je pet točaka koje određuju $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ dužina.

2 BODA

Postoji još 5 dužina kojima je jedna krajnja točka na dužini $\overline{AB}$, a druga je točka C.

1 BOD

Dakle, na slici je ukupno 15 dužina.

1 BOD

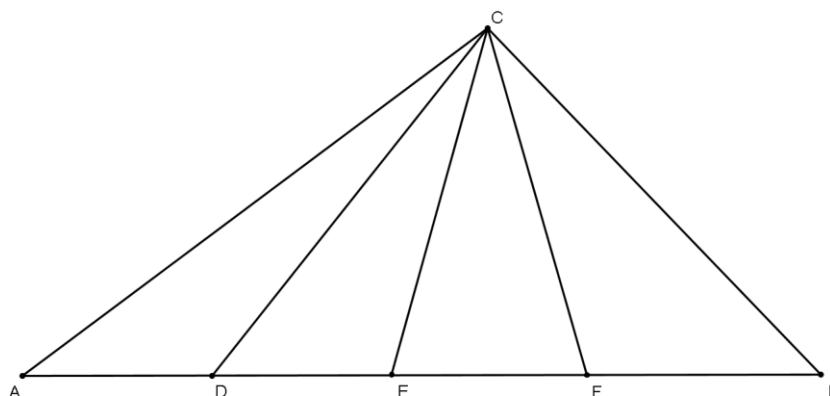
Kako svaka istaknuta dužina s dužine $\overline{AB}$ s točkom C određuje jedan trokut, na slici je ukupno

10 trokuta.

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:



Dužine su $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$, $\overline{AB}$, $\overline{DE}$, $\overline{DF}$, $\overline{DB}$, $\overline{EF}$, $\overline{EB}$, $\overline{FB}$, $\overline{CA}$, $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$, $\overline{CB}$ te ih ima ukupno 15.

4 BODA

Trokuti su $\triangle ADC$, $\triangle AEC$, $\triangle AFC$, $\triangle ABC$, $\triangle DEC$, $\triangle DFC$, $\triangle DBC$, $\triangle EFC$, $\triangle EBC$, $\triangle FBC$ te ih ima ukupno 10.

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja donose po 1 bod.

6. Prvi način:

Ako su stranice kvadrata duljine a cm, onda je opseg jednak $4 \cdot a$.

Duljine stranica trokuta uzastopni su brojevi, npr. b , $b+1$ i $b+2$ te je onda opseg

$$3 \cdot b + 3 = 3 \cdot (b + 1).$$

Duljine susjednih stranica pravokutnika razlikuju se za 2 cm pa su njihove duljine c i $c + 2$, a opseg je $4 \cdot c + 4$. 1 BOD

Budući da su opsezi jednaki, vrijedi $4 \cdot a = 3 \cdot (b + 1)$ što znači da je a višekratnik od 3. 1 BOD

Ispituju se slučajevi: $a = 3, 6, 9, 12, \dots$

Za $a = 3$ cm je $O = 4 \cdot 3 = 12$ cm te je $3 \cdot (b + 1) = 12$ odnosno $b = 3$ cm i

$$4 \cdot c + 4 = 12 \text{ odnosno } c = 2 \text{ cm.}$$

Duljine stranica trokuta su 3 cm, 4 cm i 5 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 2 cm i 4 cm. 2 BODA

Za $a = 6$ cm je $O = 4 \cdot 6 = 24$ cm te je $3 \cdot (b + 1) = 24$ odnosno $b = 7$ cm i

$$4 \cdot c + 4 = 24 \text{ odnosno } c = 5 \text{ cm.}$$

Duljine stranica trokuta su 7 cm, 8 cm i 9 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 5 cm i 7 cm. 2 BODA

Za $a = 9$ cm je $O = 4 \cdot 9 = 36$ cm te je $3 \cdot (b + 1) = 36$ odnosno $b = 11$ cm i

$$4 \cdot c + 4 = 36 \text{ odnosno } c = 8 \text{ cm.}$$

Duljine stranica trokuta su 11 cm, 12 cm i 13 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 8 cm i 10 cm. 2 BODA

Za $a = 12$ cm je $O = 4 \cdot 12 = 48$ cm te je $3 \cdot (b + 1) = 48$ odnosno $b = 15$ cm. Tada bi $b + 1 = 16$ cm bilo veće od 15 cm što nije moguće, a isto tako niti za još veće višekratnike broja 3. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Kako su duljine stranica trokuta tri uzastopna prirodna broja, ispitujemo moguće slučajeve.

Za 1 cm, 2 cm, 3 cm ne dobije se trokut.

Za 2 cm, 3 cm, 4 cm opseg bi bio 9 cm što nije djeljivo s 4.

1 BOD

Za 3 cm, 4 cm, 5 cm opseg bi bio 12 cm pa bi stranice kvadrata bile duljine 3 cm. Tada je zbroj duljina susjednih stranica pravokutnika 6 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 2 cm i 4 cm. 2 BODA

Za 4 cm, 5 cm, 6 cm opseg bi bio 15 cm što nije djeljivo s 4.

Za 5 cm, 6 cm, 7 cm opseg bi bio 18 cm što nije djeljivo s 4.

Za 6 cm, 7 cm, 8 cm opseg bi bio 21 cm što nije djeljivo s 4.

1 BOD

Za 7 cm, 8 cm, 9 cm opseg bi bio 24 cm pa bi stranice kvadrata bile duljine 6 cm. Tada je zbroj duljina susjednih stranica pravokutnika 12 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 5 cm i 7 cm. 2 BODA

Za 8 cm, 9 cm, 10 cm opseg bi bio 27 cm što nije djeljivo s 4.

Za 9 cm, 10 cm, 11 cm opseg bi bio 30 cm što nije djeljivo s 4.

Za 10 cm, 11 cm, 12 cm opseg bi bio 33 cm što nije djeljivo s 4.

1 BOD

Za 11 cm, 12 cm, 13 cm opseg bi bio 36 cm pa bi stranice kvadrata bile duljine 9 cm. Tada je zbroj duljina susjednih stranica pravokutnika 18 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 8 cm i 10 cm. 2 BODA

Za 12 cm, 13 cm, 14 cm opseg bi bio 39 cm što nije djeljivo s 4.

Za 13 cm, 14 cm, 15 cm opseg bi bio 42 cm što nije djeljivo s 4.

Za 14 cm, 15 cm, 16 cm bi stranica imala duljinu veću od dopuštenih 15 cm.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja donose po 2 boda.

7. Kako je zbroj $m + 13$ djeljiv s 13, a i pribrojnik 13 je djeljiv s 13, onda i m mora biti djeljiv s 13.

2 BODA

S obzirom da je razlika $m - 17$ djeljiva sa 17, a i umanjitelj 17 je djeljiv sa 17, onda i m mora biti djeljiv sa 17.

2 BODA

Budući da kada se m podijeli s 2 dobijemo količnik djeljiv s 2, onda je m djeljiv s 4. 2 BODA

Dakle, m je troznamenkasti broj djeljiv s 13, 17 i 4. 1 BOD

Kako je $V(13,17,4) = 884$, onda je $m = 884$. 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja donosi 4 boda.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. siječnja 2015.

6. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.

$$\frac{1}{4} + 1\frac{1}{8} + 0.5 = \frac{2}{8} + 1\frac{1}{8} + \frac{4}{8} = 1\frac{7}{8} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$1\frac{7}{8} - 0.75 - 0.5 = \frac{15}{8} - \frac{6}{8} - \frac{4}{8} = \frac{5}{8} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$1\frac{7}{8} - \frac{1}{4} - 0.75 = \frac{15}{8} - \frac{2}{8} - \frac{6}{8} = \frac{7}{8} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$1\frac{7}{8} - \frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{15}{8} - \frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$1\frac{7}{8} - \frac{3}{8} - 0.5 = \frac{15}{8} - \frac{3}{8} - \frac{4}{8} = 1 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$1\frac{7}{8} - 1 - 0.75 = \frac{15}{8} - \frac{8}{8} - \frac{6}{8} = \frac{1}{8} \quad 1 \text{ BOD}$$

0.75	$\frac{7}{8} = 0.875$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8} = 0.125$	$\frac{5}{8} = 0.625$	$1\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8} = 0.375$	0.5

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

Vlado je skupio $\frac{2}{3} \cdot 72 = 48$ boca. 1 BOD

Petar je skupio $\frac{4}{3} \cdot 48 = 64$ boca. 1 BOD

Marko, Vlado i Petar su zajedno skupili $72 \cdot 2 = 144$ boce. 1 BOD

Kako je $144 - (48 + 64) = 144 - 112 = 32$, 2 BODA

to znači da je Marko skupio 32 plastične boce. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Vlado je skupio $72 - \frac{1}{3} \cdot 72 = 72 - 24 = 48$ boca. 1 BOD

Petar je skupio $48 + \frac{1}{3} \cdot 48 = 48 + 16 = 64$ boca. 1 BOD

Marko, Vlado i Petar su zajedno skupili $72 \cdot 2 = 144$ boce. 1 BOD

Kako je $144 - (48 + 64) = 144 - 112 = 32$, 2 BODA

to znači da je Marko skupio 32 plastične boce. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

U školi ima određen broj grupa od $7 + 8 = 15$ učenika. 1 BOD

Takvih grupa ima $675 : 15 = 45$. 1 BOD

Dječaka ima $45 \cdot 7 = 315$. 2 BODA

Kako na 9 dječaka dolazi 1 učitelj i $315 : 9 = 35$,

u školi ima 35 učitelja. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

U školi je $\frac{7}{15}$ dječaka i $\frac{8}{15}$ djevojčica od ukupnog broja učenika. 2 BODA

Ukupno ima 675 učenika pa dječaka ima $\frac{7}{15} \cdot 675 = 7 \cdot 45 = 315$. 2 BODA

Kako na 9 dječaka dolazi 1 učitelj i $315 : 9 = 35$,

u školi ima 35 učitelja. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. Ako je broj djeljiv s 15, onda je djeljiv i s 5 i s 3.

Zbog djeljivosti s 5 znamenka b zadanog broja može biti 5 ili 0. 1 BOD

Zbog djeljivosti s 3 zbroj znamenaka zadanog broja mora biti djeljiv s 3. 1 BOD

1. slučaj: $b = 0$

Zadani osmeroznamenkasti broj je oblika $\overline{aaaa0000}$. Zbroj njegovih znamenaka je $4 \cdot a$ pa vrijedi da je $a \in \{3, 6, 9\}$.

Traženi brojevi su 33 330 000, 66 660 000 i 99 990 000. 2 BODA

2. slučaj $b = 5$

Zadani osmeroznamenkasti broj je oblika $\overline{aaaa5555}$. Zbroj njegovih znamenaka je $4 \cdot a + 20$ pa vrijedi da je $a \in \{1, 4, 7\}$.

Traženi brojevi su 11 115 555, 44 445 555 i 77 775 555. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

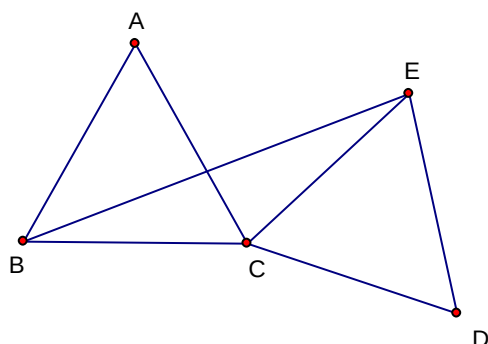
5. Razlika mase posude ispunjene do vrha vodom i mase posude do pola ispunjene vodom je polovina mase vode te iznosi $17 - 9.5 = 7.5$ kg. 2 BODA

Masa vode u punoj posudi je $2 \cdot 7.5 = 15$ kg. 2 BODA

Masa prazne posude je $17 - 15 = 2$ kg. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:



1 BOD

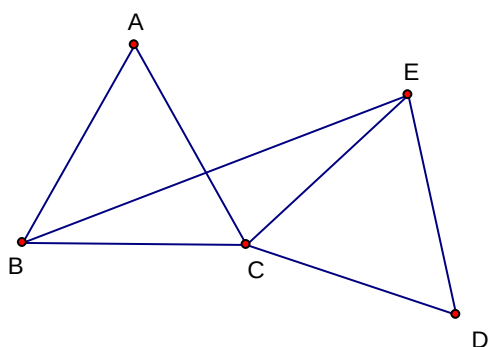
Trokut BCE je jednakokračan trokut jer vrijedi da je $|BC| = |CE|$ što je posljedica sukladnosti jednakokraničnih trokuta ABC i CDE . 2 BODA

Veličina svakog unutarnjeg kuta jednakokraničnih trokuta je 60° pa vrijedi da je $|\angle BCE| = |\angle BCA| + |\angle ACE| = 60^\circ + 74^\circ 30' = 134^\circ 30'$. 2 BODA

$\overline{BE}$ je osnovica jednakokračnog trokuta BCE pa vrijedi da je $|\angle EBC| = |\angle CEB| = (180^\circ - 134^\circ 30') : 2 = 45^\circ 30' : 2 = 22^\circ 45'$. 3 BODA

Dalje slijedi da je $|\angle ABE| = |\angle ABC| - |\angle EBC| = 60^\circ - 22^\circ 45' = 37^\circ 15'$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA
Drugi način:



1 BOD

Trokut BCE je jednakokračan trokut jer vrijedi da je $|BC| = |CE|$ što je posljedica sukladnosti jednakokraničnih trokuta ABC i CDE . 2 BODA

Veličina svakog unutarnjeg kuta jednakokraničnih trokuta je 60° pa vrijedi da je $|\angle BCE| = |\angle BCA| + |\angle ACE| = 60^\circ + 74^\circ 30' = 134^\circ 30'$. 2 BODA

$\overline{BE}$ je osnovica jednakokračnog trokuta BCE pa vrijedi da je $|\angle EBC| = |\angle CEB| = (180^\circ - 134^\circ 30') : 2 = 45^\circ 30' : 2 = 22^\circ 45'$. 3 BODA

Dalje slijedi da je $|\angle ABE| = |\angle ABC| - |\angle EBC| = 60^\circ - 22^\circ 45' = 37^\circ 15'$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Iz Zagreba je krenuo nepoznat broj putnika odnosno x putnika.

U Zadru ih je izišlo $\frac{1}{4}x$ pa je put prema Šibeniku nastavilo $\frac{3}{4}x$ putnika. 1 BOD

U Šibeniku je izišlo $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{3}{10}x$ putnika. 1 BOD

Razlika broja putnika koji su izišli u Šibeniku i onih koji su izišli u Zadru je

$\frac{3}{10}x - \frac{1}{4}x = \frac{6}{20}x - \frac{5}{20}x = \frac{1}{20}x$ odnosno 2 putnika. 2 BODA

Ako je $\frac{1}{20}$ od $x = 2$, onda je $x = 40$. Dakle, iz Zagreba je na put krenulo 40 putnika. 2 BODA

U Zadru je izišlo $\frac{1}{4} \cdot 40 = 10$ putnika, a u Šibeniku $\frac{3}{10} \cdot 40 = 12$ putnika. 2 BODA

U Split je stiglo $40 - (10 + 12) = 18$ putnika. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. siječnja 2015.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Biciklist je za 1 sat i 24 minute odnosno 1.4 sata 1 BOD
prešao put duljine $1.4 \cdot 30 = 42$ km. 1 BOD
U povratku je putovao 1 sat i 12 minuta 1 BOD
odnosno 1.2 sata. 1 BOD
Brzina na povratku je $42 : 1.2 = 35$ km/h. 2 BODA
..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Biciklist je vozio brzinom od $\frac{1}{2}$ km/min odnosno 0.5 km/min. 1 BOD
Za 1 sat i 24 minute odnosno za 84 minute prešao je put duljine $0.5 \cdot 84 = 42$ km. 1 BOD
U povratku je putovao 1 sat i 12 minuta 1 BOD
odnosno 72 minute. 1 BOD
Brzina na povratku je $42 : 72 = \frac{7}{12}$ km/min. 2 BODA
..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Iz uvjeta zadatka moguće je zapisati jednakost $x_1 + x_2 + \dots + x_{12} = 56.4$. 2 BODA

Nakon dodavanja dvaju novih brojeva jednakost glasi $x_1 + x_2 + \dots + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 78.4$. 2 BODA

Oduzimanjem prve jednakosti od druge dobivamo $x_{13} + x_{14} = 22$. 1 BOD

Srednja vrijednost dvaju brojeva čiji je zbroj 22 jest $\bar{x}_{(x_{13}+x_{14})} = 11$. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Prije 4 godine susjeda Ana je imala 32 kokoši.

Prije 3 godine susjeda Ana je imala 125% od 32 odnosno 40 kokoši. 2 BODA

Prije 2 godine susjeda Ana je imala 125% od 40 odnosno 50 kokoši. 1 BOD

Prije godinu dana je imala 80% od 50 odnosno 40 kokoši. 2 BODA

Ove godine ima 80% od 40 odnosno 32 kokoši. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. Prvi način:

Troznamenkastih brojeva ima 900 pa je toliko i kuglica u bubnju. 1 BOD

Zbroj 2 može se dobiti izvlačenjem triju kuglica (200, 110, 101). 1 BOD

Zbroj 5 može se dobiti izvlačenjem 15 kuglica (500, 410, 401, 320, 302, 311, 230, 203, 221, 212, 140, 104, 131, 113, 122). 2 BODA

Zbroj znamenaka jednak 2 ili 5 može se ostvariti izvlačenjem jedne od 18 kuglica. Vjerojatnost da se to dogodi je $18 : 900 = 0.02 = 2\%$. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Skup jednostavnih događaja je $S = \{100, 101, 102, 103, \dots, 997, 998, 999\}$. 1 BOD

Događaj A je događaj kada je izvučena kuglica na kojoj je broj čiji je zbroj znamenaka 2 ili 5. Tada je $A = \{200, 110, 101, 500, 410, 401, 140, 104, 320, 302, 230, 203, 311, 131, 113, 221, 212, 122\}$. 3 BODA

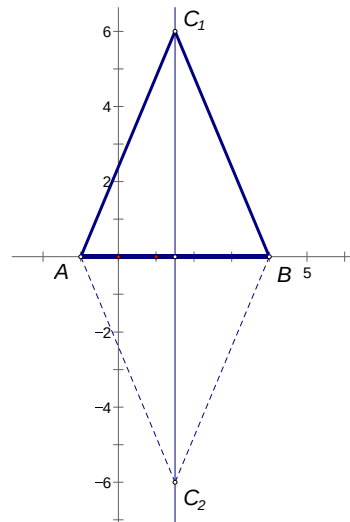
Tražena vjerojatnost je $P(A) = \frac{k(A)}{k(S)} = \frac{18}{900} = \frac{2}{100} = 2\%$.

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Kao ispravan odgovor ravnopravno prihvatiti 2%, 0.02 ili $\frac{2}{100}$.

5. Skica:



1 BOD

Duljina osnovice je 5 jedinica.

1 BOD

Kako površina trokuta mora biti 15 kvadratnih jedinica, to znači da duljina visine na osnovicu $\overline{AB}$ mora biti 6 jedinica.

1 BOD

S obzirom da je $\triangle ABC$ jednakokrakan, vrh C se nalazi na simetrali osnovice koja prolazi točkom s koordinatama (1.5, 0).

1 BOD

Zadatak ima 2 rješenja: $C_1(1.5, 6)$ i $C_2(1.5, -6)$.

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja donose 3 boda.

6. Označimo s x broj kilograma trešanja po 18 kn.

Ukupna vrijednost trešanja po 18 kn je $x \cdot 18$ kn.

1 BOD

Ukupna vrijednost trešanja po 25 kn je $2012 \cdot 25 = 50\,300$ kn.

1 BOD

Ukupna masa trešanja je $x + 2012$ kg.

1 BOD

Ukupna masa trešanja prodaje se za 20 kn po kilogramu pa je njena vrijednost $(x + 2012) \cdot 20$ kn.

1 BOD

S obzirom da vrijednost ukupne mase trešanja mora biti jednaka zbroju vrijednosti jeftinijih i skupljih trešanja, vrijedi

$$(x + 2012) \cdot 20 = x \cdot 18 + 50300$$

2 BODA

$$20x + 40240 = 18x + 50300$$

2 BODA

$$2x = 10060$$

1 BOD

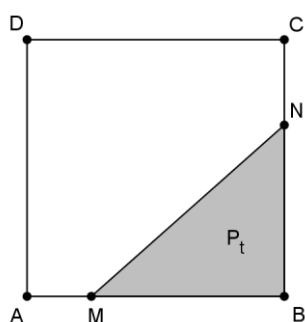
$$x = 5030 \text{ kg}$$

Treba pomiješati 5030 kg trešanja čija je cijena 18 kn/kg.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Skica:



1 BOD

Označimo duljinu stranice danog kvadrata sa a .

Tada je površina tog kvadrata $P_k = a^2$.

1 BOD

Iz uvjeta zadatka vrijedi $|\overline{BM}| = \frac{3}{4}a$.

1 BOD

Trokut MBN je pravokutan trokut s katetama $\overline{BM}$ i $\overline{BN}$.

1 BOD

Ako označimo $b = |\overline{BN}|$, onda površina pravokutnog trokuta MBN iznosi

$$P_t = \frac{|\overline{BM}| \cdot |\overline{BN}|}{2} = \frac{\frac{3}{4}a \cdot b}{2} = \frac{3}{8}a \cdot b.$$

1 BOD

Iz uvjeta zadatka vrijedi $\frac{P_t}{P_k} = \frac{\frac{3}{8}a \cdot b}{a \cdot a} = \frac{1}{4}$

1 BOD

pa slijedi da je $b = |\overline{BN}| = \frac{2}{3}a$.

2 BODA

To znači da je $|\overline{CN}| = \frac{1}{3}a$

1 BOD

pa je $\frac{|\overline{BN}|}{|\overline{CN}|} = \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{1}{3}a} = \frac{2}{1} = 2:1$.

Dakle, točka N dijeli dužinu $\overline{BC}$ u omjeru 2:1 (počevši od vrha B).

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. siječnja 2015.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$$2014 < \sqrt{x} < 2015 \quad /^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2014^2 < x < 2015^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2015^2 - 2014^2 = (2015 - 2014)(2015 + 2014) = 4029 \quad 2 \text{ BODA}$$

Ukupan broj prirodnih brojeva x za koje je nejednakost točna jednak je

$$2015^2 - 2014^2 - 1 = 4029 - 1 = 4028. \quad 2 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$$2014 < \sqrt{x} < 2015 \quad /^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2014^2 < x < 2015^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$4\,056\,196 < x < 4\,060\,225 \quad 2 \text{ BODA}$$

Nejednakost zadovoljavaju brojevi 4 056 197, 4 056 198, ..., 4 060 224. 1 BOD

Ukupan broj prirodnih brojeva x za koje je nejednakost točna jednak je

$$4\,060\,224 - 4\,056\,196 = 4028. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

$$\text{Razmjer } a : b = 2 : 5 \text{ možemo napisati u obliku } \frac{a}{b} = \frac{2}{5}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Podijelimo li brojnik i nazivnik zadanog izraza s b^2 i uvrstimo da je $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$, dobivamo

$$\frac{a^2}{ab + b^2} = \frac{\frac{a^2}{b^2}}{\frac{ab}{b^2} + \frac{b^2}{b^2}} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\frac{a}{b} + 1} = \quad 2 \text{ BODA}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^2}{\frac{2}{5} + 1} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{7}{5}} = \quad 2 \text{ BODA}$$

$$= \frac{4 \cdot 5}{25 \cdot 7} = \frac{4}{35} \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$$\text{Razmjer } a : b = 2 : 5 \text{ možemo napisati u obliku } a = \frac{2}{5}b. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{a^2}{ab + b^2} = \frac{\left(\frac{2}{5}b\right)^2}{\frac{2}{5}b \cdot b + b^2} = \frac{\frac{4}{25}b^2}{\frac{2}{5}b^2 + b^2} = \quad 2 \text{ BODA}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{4}{25}b^2}{\frac{7}{5}b^2} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{7}{5}} = \\
 &= \frac{4 \cdot 5}{25 \cdot 7} = \frac{4}{35}
 \end{aligned}$$

2 BODA

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Razmjer $a : b = 2 : 5$ možemo napisati u obliku $b = \frac{5}{2}a$. 1 BOD

$$\begin{aligned}
 \frac{a^2}{ab+b^2} &= \frac{a^2}{a \cdot \frac{5}{2}a + \left(\frac{5}{2}a\right)^2} = \frac{a^2}{\frac{5}{2}a^2 + \frac{25}{4}a^2} = \\
 &= \frac{a^2}{\frac{35}{4}a^2} = \frac{1}{\frac{35}{4}} = \\
 &= \frac{4}{35}
 \end{aligned}$$

2 BODA

2 BODA

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Četvrti način:

Razmjer $a : b = 2 : 5$ možemo napisati u obliku $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$. 1 BOD

$$\begin{aligned}
 \frac{a^2}{ab+b^2} &= \frac{a^2}{b(a+b)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1} = \\
 &= \frac{2}{5} \cdot \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} = \\
 &= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{35}
 \end{aligned}$$

2 BODA

2 BODA

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Peti način:

Budući da vrijedi $a : b = 2 : 5$, postoji racionalan broj k takav da je $a = 2k$ i $b = 5k$. 1 BOD

$$\begin{aligned}
 \frac{a^2}{ab+b^2} &= \frac{(2k)^2}{2k \cdot 5k + (5k)^2} = \\
 &= \frac{4k^2}{10k^2 + 25k^2} = \frac{4k^2}{35k^2} = \\
 &= \frac{4}{35}
 \end{aligned}$$

2 BODA

2 BODA

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

Kocka ima 8 vrhova. S tri strane obojeno je 8 jediničnih kockica koje su u vrhovima velike kocke. 2 BODA

Kocka ima 12 bridova. S dvije strane obojeno je 12 jediničnih kockica koje su uz bridove velike kocke. 2 BODA

Kocka ima 6 strana. S jedne strane obojeno je 6 jediničnih kockica, po jedna na svakoj strani kocke. 1 BOD

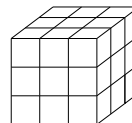
Niti s jedne strane nije obojena $27 - 8 - 12 - 6 = 1$ jedinična kockica.

1 BOD

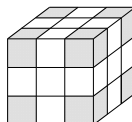
..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Nakon lijepljenja jediničnih kockica, velika kocka izgleda kao na donjoj slici.

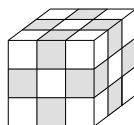


S tri strane obojeno je 8 jediničnih kockica.



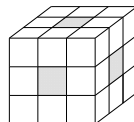
2 BODA

S dvije strane obojeno je 12 jediničnih kockica.



2 BODA

S jedne strane obojeno je 6 jediničnih kockica.



1 BOD

Niti s jedne strane nije obojena $27 - 8 - 12 - 6 = 1$ jedinična kockica.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja ili bez slike donose po 1 bod.

4. Neka je n broj stranica (vrhova) traženog mnogokuta.

Iz jednog vrha tog mnogokuta može se nacrtati $n - 3$ dijagonale,

a ukupan broj dijagonala tog mnogokuta jednak je $\frac{n(n-3)}{2}$.

1 BOD

U mnogokutu koji ima $n + 5$ stranica,

iz jednog vrha može se nacrtati $n + 5 - 3 = n + 2$ dijagonale,

a ukupan broj dijagonala tog mnogokuta je $\frac{(n+5)(n+2)}{2}$.

1 BOD

Prema uvjetu zadatka vrijedi: $\frac{n(n-3)}{2} + 50 = \frac{(n+5)(n+2)}{2}$

1 BOD

Rješavanjem ove jednadžbe dobiva se redom

$$n(n-3) + 100 = (n+5)(n+2)$$

1 BOD

$$n^2 - 3n + 100 = n^2 + 7n + 10$$

1 BOD

$$10n = 90$$

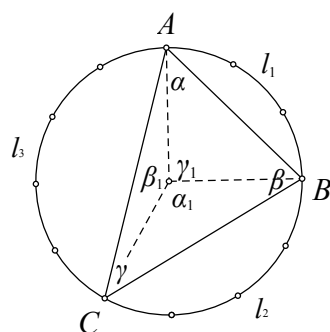
i konačno $n = 9$.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Rješenje dobiveno metodom uzastopnog približavanja (npr. ispunjavanjem tablice) može se bodovati s 10 bodova. Ako nema svih računa, nego samo točan konačan rezultat, onda se boduje s 2 boda.

5. Prvi način:



Duljine kružnih lukova $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ i $\widehat{AC}$ označimo redom l_1 , l_2 i l_3 , a odgovarajuće im središnje kutove γ_1 , α_1 i β_1 .

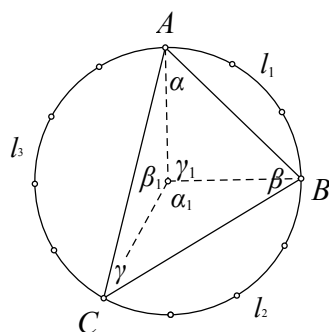
Budući da je $l_1 = \frac{3}{12} \cdot 2r\pi = \frac{1}{4} \cdot 2r\pi$ i $l_1 = \frac{r\pi}{180^\circ} \cdot \gamma_1$, slijedi da je $\gamma_1 = \frac{r\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{r\pi} = 90^\circ$. 2 BODA

Analogno dobivamo da je $\alpha_1 = 120^\circ$ i $\beta_1 = 150^\circ$. 2 BODA

Kutovi trokuta α , β i γ obodni su kutovi odgovarajućih središnjih kutova α_1 , β_1 i γ_1 pa je konačno $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 75^\circ$ i $\gamma = 45^\circ$. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:



Duljine kružnih lukova iste kružnice proporcionalne su veličinama pripadnih središnjih kutova pa uz oznake kao na slici vrijedi $\gamma_1 : \alpha_1 : \beta_1 = 3 : 4 : 5$. 1 BOD

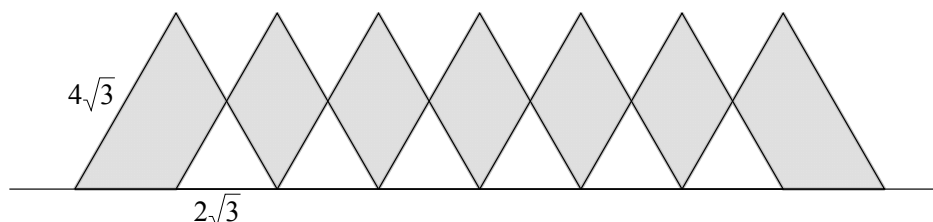
Budući da je $\gamma_1 + \alpha_1 + \beta_1 = 360^\circ$ i $360^\circ : (3 + 4 + 5) = 360^\circ : 12 = 30^\circ$, 1 BOD

zaključujemo da je $\gamma_1 = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$, $\alpha_1 = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$ i $\beta_1 = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$. 2 BODA

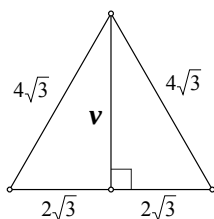
Kutovi trokuta α , β i γ obodni su kutovi odgovarajućih središnjih kutova α_1 , β_1 i γ_1 pa je konačno $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 75^\circ$ i $\gamma = 45^\circ$. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:



Površina sivog dijela jednaka je zbroju površina 7 sukladnih jednakokraničnih trokuta sa stranicom duljine $4\sqrt{3}$ cm umanjenim za zbroj $2 \cdot 6 = 12$ površina (na „bijelim mjestima“ preklopljeni su i oduzeti dijelovi dvaju trokuta!) jednakokraničnih trokuta sa stranicom duljine $2\sqrt{3}$ cm. 3 BODA
Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine većeg trokuta.



$$v^2 = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 48 - 12 = 36$$

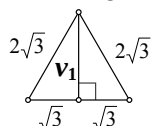
$$v = 6 \text{ cm}$$

2 BODA

Površina tog trokuta jednaka je $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine manjeg trokuta.



$$v_1^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 = 12 - 3 = 9$$

$$v_1 = 3 \text{ cm}$$

2 BODA

Površina tog trokuta jednaka je $P_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

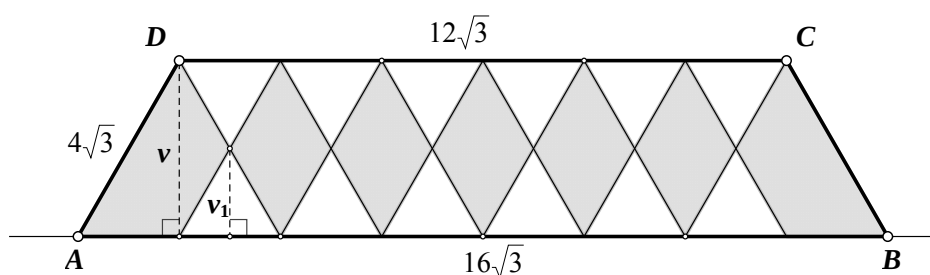
1 BOD

Površina sivog dijela lika jednaka je $7 \cdot P_1 - 12 \cdot P_2 = 7 \cdot 12\sqrt{3} - 12 \cdot 3\sqrt{3} = 84\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



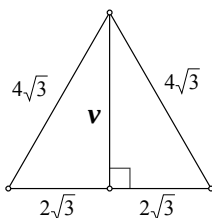
Površina sivog dijela jednaka je površini trapeza $ABCD$ umanjenoj za zbroj površina 12 „bijelih“ jednakostraničnih trokuta.

2 BODA

Duljine osnovica trapeza su $|AB| = 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ cm}$ i $|CD| = 3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ cm}$

1 BOD

Duljina visine trapeza jednaka je duljini visine jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine $4\sqrt{3} \text{ cm}$. Određujemo je primjenom Pitagorinog poučka.



$$v^2 = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 48 - 12 = 36$$

$$v = 6 \text{ cm}$$

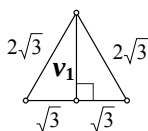
2 BODA

Površina trapeza $ABCD$ jednaka je

$$P_{ABCD} = \frac{16\sqrt{3} + 12\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 14\sqrt{3} \cdot 6 = 84\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine manjeg trokuta.



$$v_1^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 = 12 - 3 = 9$$

$$v_1 = 3 \text{ cm}$$

2 BODA

Površina tog trokuta jednaka je $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

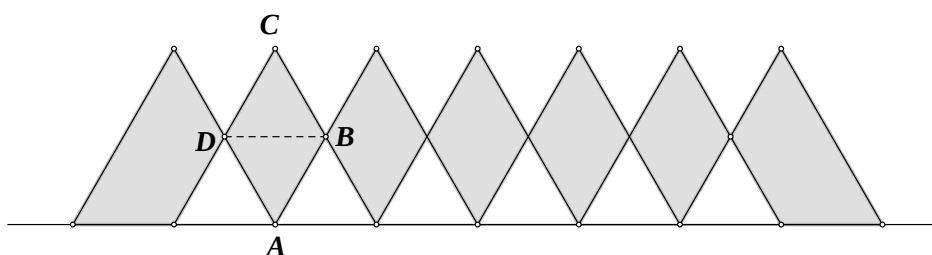
Površina sivog dijela lika jednaka je $P_{ABCD} - 12 \cdot P_1 = 84\sqrt{3} - 12 \cdot 3\sqrt{3} = 84\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

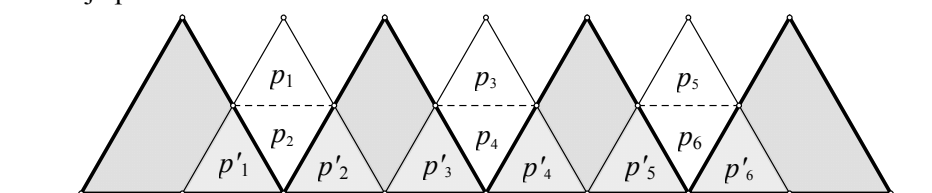
Treći način:

Romb $ABCD$ na slici sastavljen je od dva sukladna jednakostranična trokuta sa stranicom duljine $2\sqrt{3} \text{ cm}$. Ti su trokuti sukladni „bijelim“ trokutima sa slike



2 BODA

Neke od „sivih“ rombova možemo podijeliti na trokute i presložiti tako da popune bijele dijelove, kao što je prikazano na slici:

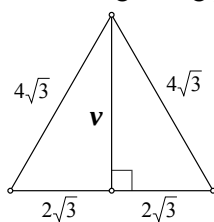


2 BODA

Dakle, površina sivih dijelova slike jednaka je površini četiriju jednakostraničnih trokuta sa stranicom duljine $4\sqrt{3} \text{ cm}$.

2 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine većeg trokuta.



$$v^2 = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 48 - 12 = 36$$

$$v = 6 \text{ cm}$$

2 BODA

Površina tog trokuta jednaka je $P = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

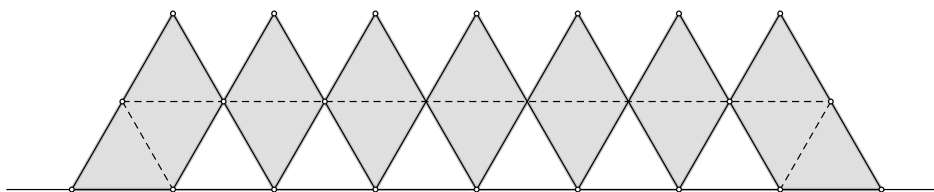
Površina sivog dijela lika jednaka je $4 \cdot P = 4 \cdot 12\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Četvrti način:

Sivi dio zadanog lika možemo podijeliti, kao što je prikazano na slici, na 16 jednakostraničnih trokuta.

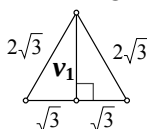


3 BODA

Budući da su dužinama spajana polovišta stranica jednakostraničnih trokuta, dobiveni su trokuti slični zadanom „velikom“ trokutu, s upola kraćim stranicama. Dakle, duljina stranice tih trokuta je $2\sqrt{3}$ cm.

3 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine manjeg trokuta.



$$v_1^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 = 12 - 3 = 9$$

$$v_1 = 3 \text{ cm}$$

2 BODA

Površina tog trokuta jednaka je $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

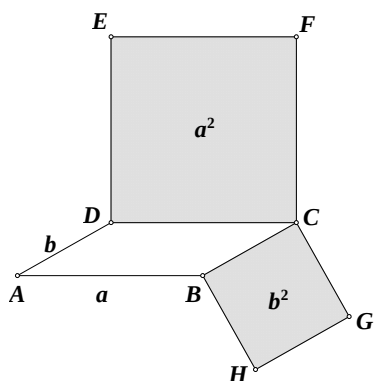
Površina sivog dijela lika jednaka je $16 \cdot P_1 = 16 \cdot 3\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točno izračunata površina velikog trokuta, odnosno površina malog trokuta vrednuje se s po 3 boda (ako su ispravno izračunate obje površine, to donosi ukupno 6 bodova).

7. Prvi način:



Skica ili opis (Označimo sa a duljinu veće, a b duljinu kraće stranice.)

1 BOD

Tada vrijedi $2a + 2b = 30$ odnosno $a + b = 15$

i $a^2 + b^2 = 113$.

1 BOD

Budući da je $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, nakon uvrštavanja dobivamo $15^2 = 113 + 2ab$ odnosno

$$2ab = 225 - 113 = 112.$$

2 BODA

Budući da je $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, nakon uvrštavanja dobivamo

$$(a - b)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab = 113 - 112, \text{ odnosno } (a - b)^2 = 1.$$

2 BODA

Ako je $(a - b)^2 = 1$, onda (uz pretpostavku da je $a > b$ tj. da je $a - b > 0$) mora biti $a - b = 1$.

2 BODA

Duljine stranica zadovoljavaju sustav jednačbi $\begin{cases} a + b = 15 \\ a - b = 1 \end{cases}$

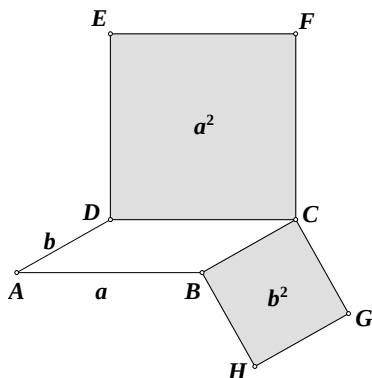
1 BOD

Rješavanjem sustava nalazimo rješenje $a = 8 \text{ cm}$ i $b = 7 \text{ cm}$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



Skica ili opis (Označimo sa a duljinu veće, a sa b duljinu kraće stranice.)

1 BOD

Tada vrijedi $2a + 2b = 30$ odnosno $a + b = 15$

i $a^2 + b^2 = 113$.

1 BOD

Iz $a + b = 15$ slijedi da je $b = 15 - a$ pa nakon uvrštavanja dobivamo $a^2 + (15 - a)^2 = 113$

1 BOD

odnosno $a^2 + 225 - 30a + a^2 = 113$.

1 BOD

Sređivanjem jednadžbe dobivamo $2a^2 - 30a + 112 = 0$, a nakon dijeljenja cijele jednadžbe s 2, dobivamo $a^2 - 15a + 56 = 0$.

1 BOD

Tu jednadžbu možemo faktorizirati tj. napisati u obliku umnoška $(a - 8)(a - 7) = 0$.

2 BODA

Umnožak dvaju brojeva jednak je nuli samo u slučaju da je jedan od tih brojeva jednak nuli, tj. samo u slučaju $a = 8$ cm (i tada je $b = 7$ cm) ili $a = 7$ cm (i tada je $b = 8$ cm).

1 BOD

Kako smo označili sa a dulju stranicu paralelograma, drugi slučaj otpada.

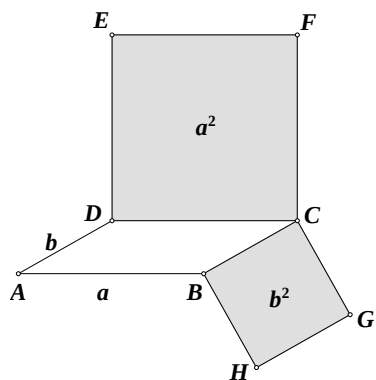
Dakle, $a = 8$ cm i $b = 7$ cm.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Analogan postupak i bodovanje provodi se u slučaju da je korištena supstitucija $a = 15 - b$.

Napomena: Rješenje dobiveno metodom uzastopnog približavanja (npr. ispunjavanjem tablice) može se bodovati s 10 bodova, ali mora biti jasno navedeno značenje korištenih oznaka i vidljiv zapis postupka (račun). Dakle, tim načinima rješavanja mora prethoditi skica ili opis



(Označimo sa a duljinu veće, a sa b duljinu kraće stranice.)

Tada vrijedi $2a + 2b = 30$ odnosno $a + b = 15$

i $a^2 + b^2 = 113$.

a	14	13	12	11	10	9	8
$b = 15 - a$	1	2	3	4	5	6	7
$a^2 + b^2$	197	173	153	127	125	117	113

U tom se slučaju rješenje može bodovati s 10 bodova. Ako oznaka, računa i objašnjenja nema, točan konačan rezultat donosi 2 boda.