

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. veljače 2015.

4. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Ako 30 poruka u mreži *Mobi x* košta 18 kn, onda 10 poruka košta $18 : 3 = 6$ kuna. 4 BODA

Ako 40 poruka u mreži *Mobi y* košta 28 kn, onda 10 poruka košta $28 : 4 = 7$ kuna. 4 BODA

Kako je $6 < 7$, povoljnije su cijene SMS poruka u mreži *Mobi x*. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Ako 30 poruka u mreži *Mobi x* košta 18 kn, onda 120 poruka košta $18 \cdot 4 = 72$ kune. 4 BODA

Ako 40 poruka u mreži *Mobi y* košta 28 kn, onda 120 poruka košta $28 \cdot 3 = 84$ kune. 4 BODA

Kako je $72 < 84$, povoljnije su cijene SMS poruka u mreži *Mobi x*. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Ako 30 poruka u mreži *Mobi x* košta 1800 lp, onda 1 poruka košta $1800 : 30 = 60$ lp. 4 BODA

Ako 40 poruka u mreži *Mobi y* košta 2800 lp, onda 1 poruka košta $2800 : 40 = 70$ lp. 4 BODA

Kako je $60 < 70$, povoljnije su cijene SMS poruka u mreži *Mobi x*. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja donosi 2 boda.

2. Troznamenkasti brojevi čiji je umnožak znamenaka jednak broju 2 mogu biti brojevi 112, 211 i

121. 2 BODA

Samo je broj 121 palindrom. 1 BOD

Broj 121 je dobiven dijeljenjem nekog broja s 3 odnosno dobiven je od broja $121 \cdot 3 = 363$.

2 BODA

Broj 363 je dobiven oduzimanjem broja 129 pa je dobiven od broja $363 + 129 = 492$. 2 BODA

Broj 492 je dobiven množenjem zamišljenog broja s 4, a to znači da je zamišljeni broj

$492 : 4 = 123$. Dakle, Ivo je zamislio broj 123. 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

Markov račun je iznosio 19 kuna i 60 lipa. 1 BOD

Da nije kupio niti jednu bilježnicu, mogao bi kupiti 11 olovaka za što bi platio 18 kn i 70 lp, ali bi mu ostalo još 90 lp. 1 BOD

Ako je kupio 1 bilježnicu i platio 5 kn i 40 lp, za olovke je preostalo 14 kn i 20 lp. Za taj bi novac mogao kupiti 8 olovaka, no još bi mu ostalo 60 lp. 2 BODA

Da je kupio 2 bilježnice i platio 10 kn i 80 lp, za olovke bi preostalo 8 kn i 80 lp. Za taj novac može kupiti 5 olovaka, ali bi mu ostalo još 30 lipa. 2 BODA

Pretpostavimo da je kupio 3 bilježnice i platio 16 kn i 20 lp. Ostatkom novca od 3 kune i 40 lipa može kupiti točno 2 olovke. 2 BODA

Za 4 bilježnice bi mu bila potrebna 21 kn i 60 lp, a toliko nije potrošio. 1 BOD

Marko je kupio 3 bilježnice i 2 olovke. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Markov račun je iznosio 19 kuna i 60 lipa odnosno 1960 lipa. 1 BOD

Da nije kupio niti jednu bilježnicu, mogao bi kupiti 11 olovaka za što bi platio 1870 lp, ali bi mu ostalo još 90 lp. 1 BOD

Ako je kupio 1 bilježnicu i platio 540 lp, za olovke je preostalo 1420 lp. Za taj bi novac mogao kupiti 8 olovaka, no još bi mu ostalo 60 lp. 2 BODA

Da je kupio 2 bilježnice i platio 1080 lp, za olovke bi preostalo 880 lp. Za taj novac može kupiti 5 olovaka, ali bi mu ostalo još 30 lipa. 2 BODA

Pretpostavimo da je kupio 3 bilježnice i platio 1620 lp. Ostatkom novca od 340 lipa može kupiti točno 2 olovke. 2 BODA

Za 4 bilježnice bi mu bilo potrebno 2160 lp, a toliko nije potrošio. 1 BOD

Marko je kupio 3 bilježnice i 2 olovke.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Potrebno je razmatrati sve slučajeve, a ako to nije učinjeno, umanjiti broj bodova za odgovarajući iznos ovisno o tome koji se slučajevi nisu razmatrali.

4. U troznamenkastom broju zbroj znamenaka može biti 7 ako zbrojimo 7, 0 i 0 što daje broj 700.

1 BOD

Zbroj 7 možemo dobiti ako zbrojimo 6, 1 i 0 što daje brojeve 610, 601, 106, 160.

1 BOD

Zbroj 7 možemo dobiti ako zbrojimo 5, 2 i 0 što daje brojeve 520, 502, 205, 250.

1 BOD

Zbroj 7 možemo dobiti ako zbrojimo 5, 1 i 1 što daje brojeve 511, 151, 115.

1 BOD

Zbroj 7 možemo dobiti ako zbrojimo 4, 3 i 0 što daje brojeve 430, 403, 304, 340.

1 BOD

Zbroj 7 možemo dobiti ako zbrojimo 4, 2 i 1 što daje brojeve 421, 412, 142, 124, 241, 214.

1 BOD

Zbroj 7 možemo dobiti ako zbrojimo 3, 3 i 1 što daje brojeve 331, 313, 133.

1 BOD

Zbroj 7 možemo dobiti ako zbrojimo 3, 2 i 2 što daje brojeve 322, 232, 223.

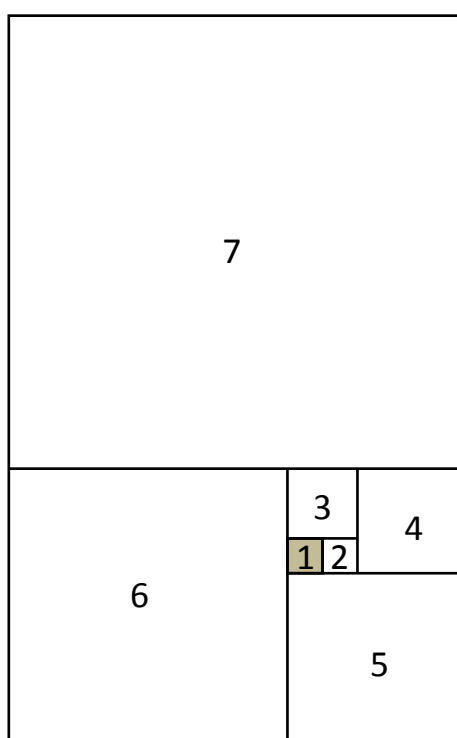
1 BOD

Traženih brojeva ima ukupno 28.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Označimo kvadrate brojevima od 1 do 7.



Kvadrat 2 ima zajedničku stranicu s kvadratom 1 što znači da mu je stranica duljine 1 cm.	1 BOD
Kvadrat 3 ima stranicu duljine $1 + 1 = 2$ cm.	1 BOD
Kvadrat 4 ima stranicu duljine $1 + 2 = 3$ cm.	1 BOD
Kvadrat 5 ima stranicu duljine $1 + 1 + 3 = 5$ cm.	1 BOD
Kvadrat 6 ima stranicu duljine $2 + 1 + 5 = 8$ cm.	1 BOD
Kvadrat 7 ima stranicu duljine $3 + 2 + 8 = 13$ cm.	1 BOD
Pravokutnik ima stranice duljina 13 cm i $8 + 13 = 21$ cm.	1 BOD
Opseg pravokutnika je $2 \cdot 13 + 2 \cdot 21 = 26 + 42 = 68$ cm.	1 BOD
Površina pravokutnika je $13 \cdot 21 = 273$ cm ² .	2 BODA
.....	UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. veljače 2015.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Vrijednost Petrove i Markove nagrade je jednaka odnosno 1 bombonjera i 20 kn vrijedi kao

1 čokolada i 30 kn. To znači da 1 bombonjera vrijedi kao 1 čokolada i 10 kn. 3 BODA

Ako 1 bombonjera košta kao 3 čokolade, onda zaključujemo da 3 čokolade imaju jednaku

vrijednost kao 1 čokolada i 10 kn. Iz toga slijedi da 2 čokolade koštaju 10 kn. 3 BODA

Dakle, cijena 1 čokolade je 5 kuna, a onda je vrijednost 1 bombonjere 15 kuna. 2 BODA

Marko je dobio nagradu u vrijednosti od 35 kuna. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Vrijednost Petrove i Markove nagrade je jednaka odnosno 1 bombonjera i 20 kn vrijedi kao

1 čokolada i 30 kn. Kako 1 bombonjera košta kao 3 čokolade, onda to znači da 3 čokolade i 20 kn imaju jednaku vrijednost kao 1 čokolada i 30 kn. 3 BODA

Iz toga slijedi da 2 čokolade koštaju 10 kn. 3 BODA

Dakle, cijena 1 čokolade je 5 kuna, a onda je vrijednost 1 bombonjere 15 kuna. 2 BODA

Marko je dobio nagradu u vrijednosti od 35 kuna. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Rješavanje pomoću jednadžbe treba u cijelosti prihvatiti.

2. Ako je traženi broj $\overline{abc}$, tada mora vrijediti $a + b = 13$.

Sve mogućnosti traženih znamenaka a i b su:

a	9	8	7	6	5	4
b	4	5	6	7	8	9

2 BODA

Da bi broj $\overline{abc}$ bio djeljiv s 4, njegov dvoznamenkasti završetak $\overline{bc}$ mora biti djeljiv s 4. 1 BOD

Za $a = 9, b = 4$ traženi brojevi su 940, 944, 948. 1 BOD

Za $a = 8, b = 5$ traženi brojevi su 852, 856. 1 BOD

Za $a = 7, b = 6$ traženi brojevi su 760, 764, 768. 1 BOD

Za $a = 6, b = 7$ traženi brojevi su 672, 676. 1 BOD

Za $a = 5, b = 8$ traženi brojevi su 580, 584, 588. 1 BOD

Za $a = 4, b = 9$ traženi brojevi su 492 i 496. 1 BOD

Traženih brojeva ima ukupno 15. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Kako je $m \cdot n = 2016$, $V(m,n) = 504$ i $D(m,n) \cdot V(m,n) = m \cdot n$, onda je $D(m,n) \cdot 504 = 2016$

odnosno $D(m,n) = 4$. 1 BOD

S obzirom da je $V(m,n) = 504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, $D(m,n) = 4 = 2 \cdot 2$ i $m > n$, 1 BOD

postoje sljedeće mogućnosti:

a) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 504$, $n = 2 \cdot 2 = 4$, 2 BODA

b) $m = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 252$, $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, 2 BODA

c) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 56$, $n = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$, 2 BODA

d) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$, $n = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Kako je 207 neparan broj, a višekratnik broja 2 paran, broj kovanica od 5 kn mora biti neparan.

2 BODA

Kako je $207 - 50 \cdot 2 = 207 - 100 = 107$ i $21 \cdot 5 = 105$, broj kovanica od 5 kn mora biti veći od 21.

2 BODA

Broj kovanica od 5 kn	23	25	27	29	31
Broj kovanica od 2 kn	46	41	36	31	26
Ukupni iznos	115 + 92	125 + 82	135 + 72	145 + 62	155 + 52

5 BODOVA

Ukupno postoji 5 različitih načina plaćanja poklona.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Kako je 207 neparan broj, a višekratnik broja 2 paran, broj kovanica od 5 kn mora biti neparan.

2 BODA

Neparan broj kovanica od 5 kn ima vrijednost kojoj je znamenka jedinica 5 pa broj kovanica od 2 kn ima vrijednost kojoj znamenka jedinica mora biti 2.

Znamenka jedinica broja kovanica od 2 kn	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Znamenka jedinica vrijednosti kovanica od 2 kn	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8

Dakle, broj kovanica od 2 kn ima znamenku jedinica 1 ili 6.

1 BOD

Kako je $207 - 32 \cdot 5 = 207 - 160 = 47$ i $23 \cdot 2 = 46$, broj kovanica od 2 kn mora biti veći od 23.

1 BOD

Broj kovanica od 2 kn	26	31	36	41	46
Broj kovanica od 5 kn	31	29	27	25	23
Ukupni iznos	$52 + 155$	$62 + 145$	$72 + 135$	$82 + 125$	$92 + 115$

5 BODOVA

Ukupno postoji 5 različitih načina plaćanja poklona.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Kako je 207 neparan broj, a višekratnik broja 2 paran, broj kovanica od 5 kn mora biti neparan.

2 BODA

Marinela ima $50 \cdot 2 + 32 \cdot 5 = 100 + 160 = 260$ kuna.

Ako uzme najveći mogući neparni broj kovanica od 5 kuna, a to je 31, onda joj nedostaju još

$207 - 31 \cdot 5 = 207 - 155 = 52$ kune. Njih će nadopuniti s 26 kovanica od 2 kune.

1 BOD

Ako uzme 29 kovanica od 5 kuna, trebat će joj još $207 - 29 \cdot 5 = 207 - 145 = 62$ kune. Dakle, 31 kovanica po 2 kune.

1 BOD

Ako uzme 27 kovanica od 5 kuna, trebat će joj još $207 - 27 \cdot 5 = 207 - 135 = 72$ kune. Dakle, 36

kovanica po 2 kune. 1 BOD

Ako uzme 25 kovanica od 5 kuna, trebat će joj još $207 - 25 \cdot 5 = 207 - 125 = 82$ kune. Dakle, 41

kovanica po 2 kune. 1 BOD

Ako uzme 23 kovanica od 5 kuna, trebat će joj još $207 - 23 \cdot 5 = 207 - 115 = 92$ kune. Dakle, 46

kovanica po 2 kune. 1 BOD

Ako uzme 21 kovanicu od 5 kuna, trebat će joj još $207 - 21 \cdot 5 = 207 - 105 = 102$ kune. Kako

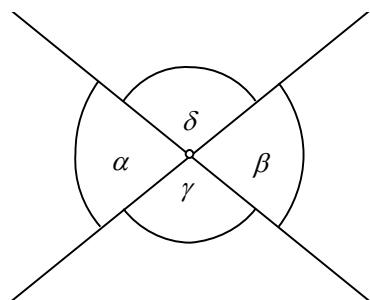
Marinela ima samo 100 kuna u kovanicama od 2 kune, ovaj slučaj je nemoguć. Također je

nemoguće uzeti manje od 21 kovanice od 5 kuna. 2 BODA

Ukupno postoji 5 različitih načina plaćanja poklona. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:



1 BOD

Vrijedi $\alpha = \beta$ i $\gamma = \delta$ (vršni kutovi) .

1 BOD

$$3 \cdot (\alpha + \beta) = 2 \cdot (\gamma + \delta)$$

$$3 \cdot (\alpha + \alpha) = 2 \cdot (\gamma + \gamma)$$

1 BOD

$$3 \cdot 2\alpha = 2 \cdot 2\gamma$$

$$3 \cdot \alpha = 2 \cdot \gamma$$

1 BOD

Vrijedi $\alpha + \gamma = 180^\circ$ (susjedni kutovi) .

1 BOD

$$2 \cdot \alpha + 2 \cdot \gamma = 2 \cdot 180^\circ$$

$$2 \cdot \alpha + 3 \cdot \alpha = 360^\circ$$

1 BOD

$$5 \cdot \alpha = 360^\circ$$

$$\alpha = 360^\circ : 5 = 72^\circ$$

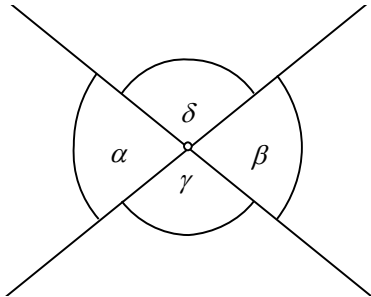
1 BOD

Slijedi $\beta = 72^\circ$, $\gamma = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ i $\delta = 108^\circ$.

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



1 BOD

Vrijedi $\alpha = \beta$ i $\gamma = \delta$ (vršni kutovi).

1 BOD

$$3 \cdot (\alpha + \beta) = 2 \cdot (\gamma + \delta)$$

$$3 \cdot 2\alpha = 2 \cdot (\gamma + \delta)$$

$$3 \cdot \alpha = \gamma + \delta$$

1 BOD

Kako je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$, slijedi

1 BOD

$$\alpha + \alpha + 3 \cdot \alpha = 360^\circ$$

1 BOD

$$5 \cdot \alpha = 360^\circ$$

$$\alpha = 360^\circ : 5 = 72^\circ$$

1 BOD

Vrijedi $\alpha + \gamma = 180^\circ$ (susjedni kutovi).

1 BOD

Slijedi $\beta = 72^\circ$, $\gamma = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ i $\delta = 108^\circ$.

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. veljače 2015.

6. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

$$\begin{aligned} 1. & \left[\left(3\frac{1}{2} - 2 : 1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3} \right) \cdot 10 - 6\frac{1}{3} \right] : \left(\frac{3}{4} : 0.1 \right) - 3.5 = \\ & = \left[\left(\frac{7}{2} - 2 : \frac{5}{3} + \frac{7}{3} \right) \cdot 10 - \frac{19}{3} \right] : \left(\frac{3}{4} : \frac{1}{10} \right) - 3.5 = \\ & = \left[\left(\frac{7}{2} - 2 \cdot \frac{3}{5} + \frac{7}{3} \right) \cdot 10 - \frac{19}{3} \right] : \left(\frac{3}{4} \cdot 10 \right) - 3.5 = \\ & = \left[\left(\frac{7}{2} - \frac{6}{5} + \frac{7}{3} \right) \cdot 10 - \frac{19}{3} \right] : \frac{15}{2} - 3.5 = & 2 \text{ BODA} \\ & = \left[\frac{105 - 36 + 70}{30} \cdot 10 - \frac{19}{3} \right] : \frac{15}{2} - 3.5 = \\ & = \left[\frac{139}{30} \cdot 10 - \frac{19}{3} \right] : \frac{15}{2} - 3.5 = & 1 \text{ BOD} \\ & = \left[\frac{139}{3} - \frac{19}{3} \right] : \frac{15}{2} - 3.5 = & 1 \text{ BOD} \\ & = \frac{120}{3} : \frac{15}{2} - \frac{35}{10} = & 1 \text{ BOD} \\ & = 40 \cdot \frac{2}{15} - \frac{35}{10} = \\ & = \frac{16}{3} - \frac{7}{2} = & 1 \text{ BOD} \\ & = \frac{32 - 21}{6} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}. & 1 \text{ BOD} \end{aligned}$$

Traženi cijeli brojevi su $-1, 0$ i 1 . 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:

Josip mora podijeliti bombone na trećine, četvrtine, šestine i osmine pa ukupan broj bombona mora biti višekratnik brojeva 3, 4, 6 i 8. 1 BOD

Najmanji zajednički višekratnik je $V(3, 4, 6, 8) = 24$. 1 BOD

Budući da je ukupan broj bombona u vrećici dvoznamenkast, može ih biti 24, 48, 72 ili 96. 1 BOD

Najmanji broj bombona je dobio otac (osminu). Dakle, otac je mogao dobiti 3, 6, 9 ili 12 bombona.

Broj bombona, koje je dobio otac, mora biti dvoznamenkast pa se može zaključiti da je otac dobio 12 bombona odnosno da je ukupan broj bombona 96. 2 BODA

Sestra je dobila 32, brat 24, majka 16 i otac 12 bombona. 3 BODA

To je ukupno 84 bombona pa je Josipu ostalo još 12 bombona. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Nakon podjele Josipu će ostati $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{24-8-6-4-3}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ ukupnog broja

bombona. 2 BODA

Ukupan broj bombona mora biti višekratnik brojeva 3, 4, 6 i 8. 1 BOD

Najmanji zajednički višekratnik je $V(3, 4, 6, 8) = 24$. 1 BOD

Ukupan broj bombona u vrećici je dvoznamenkast, tj. može ih biti 24, 48, 72 ili 96. 1 BOD

Najmanji broj bombona (po osminu) dobivaju otac i Josip. Dakle, oni mogu dobiti po 3, 6, 9 ili 12

bombona. Broj bombona koje dobivaju mora biti dvoznamenkast pa se može zaključiti da su otac i

Josip dobili po 12 bombona odnosno da je ukupan broj bombona 96. 2 BODA

Sestra je dobila 32, brat 24, majka 16, a otac i Josip po 12 bombona. 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Rješavanje pomoću jednadžbe treba u cijelosti prihvatiti.

3. Neka je b znamenka koja se ponavlja u zadanom zbroju.

Iz uvjeta zadatka vrijedi da je $a + 2a + 3a + \dots + 9a = \overline{bbbb\dots b}$. 2 BODA

$a + 2 \cdot a + 3 \cdot a + \dots + 9 \cdot a = a \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 45 \cdot a$ 2 BODA

odnosno vrijedi $45 \cdot a = \overline{bbbb...b}$. 1 BOD

Dakle, $\overline{bbbb...b}$ mora biti djeljiv s 45, tj. s 5 i s 9. 1 BOD

Iz djeljivosti s 5 slijedi da znamenka b mora biti 5. 1 BOD

Iz djeljivosti s 9 i zahtjeva da se odredi najmanji broj slijedi da je $\overline{bbbb...b} = 555\,555\,555$. 1 BOD

Na kraju je najmanji prirodan broj a za koji vrijedi tvrdnja $a = 555\,555\,555 : 45 = 12\,345\,679$.

2 BODA

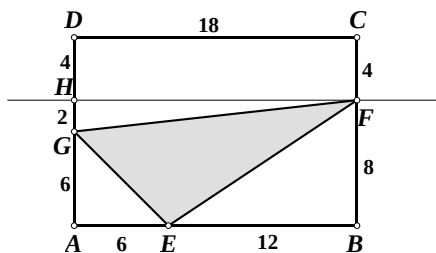
..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je $|AB| = a$ i $|BC| = b$. Iz uvjeta zadatka vrijedi da je $2a + 2b = 60$ i $b = \frac{2}{3}a$ odnosno

$$2a + 2 \cdot \frac{2}{3}a = 60. \text{ Dalje slijedi da je } 2a + \frac{4}{3} \cdot a = 60 \text{ te } \frac{10}{3} \cdot a = 60 \text{ i onda}$$

$$a = 18 \text{ cm i } b = 12 \text{ cm.}$$

2 BODA



1 BOD

$$P_{EFG} = P_{ABCD} - (P_{AEG} + P_{BFE} + P_{CDGF})$$

$$\text{Vrijedi da je } P_{ABCD} = 18 \cdot 12 = 216 \text{ cm}^2,$$

$$P_{AEG} = (6 \cdot 6) : 2 = 18 \text{ cm}^2,$$

$$P_{BFE} = (12 \cdot 8) : 2 = 48 \text{ cm}^2.$$

3 BODA

Površinu četverokuta $CDGF$ možemo izračunati tako da točkom F nacrtamo pravac koji je

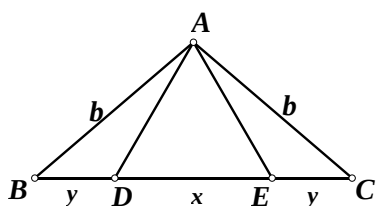
usporedan s dužinom $\overline{CD}$. Tada je

$$P_{CDGF} = P_{CDHF} + P_{HGF} = 18 \cdot 4 + (18 \cdot 2) : 2 = 72 + 18 = 90 \text{ cm}^2. \quad 2 \text{ BODA}$$

$$P_{EFG} = 216 - (18 + 48 + 90) = 216 - 156 = 60 \text{ cm}^2. \quad 2 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

5.



1 BOD

Trokut ABC je jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{BC}$ pa vrijedi da je $|AB| = |AC|$ i

$|\angle CBA| = |\angle ACB|$ odnosno $|\angle DBA| = |\angle ACE|$. Budući je iz uvjeta zadatka $|BD| = |EC| = y$,

prema poučku S-K-S o sukladnosti zaključujemo da su trokuti ABD i ACE sukladni. 2 BODA

Posljedica te sukladnosti jest da je $|AD| = |AE|$. 1 BOD

Budući da u trokutu nasuprot stranica jednakih duljina leže sukladni kutovi, može se zaključiti da u trokutu ADE vrijedi $|\angle EDA| = |\angle AED|$. 1 BOD

Nadalje, za kutove trokuta ADE vrijedi

$$|\angle EDA| + |\angle AED| + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow |\angle EDA| + |\angle AED| = 120^\circ \Rightarrow |\angle EDA| = |\angle AED| = 60^\circ$$

što znači da je trokut ADE jednakostraničan. 1 BOD

Označimo duljinu stranice trokuta ADE s x . Opseg tog trokuta je 15 cm pa slijedi da je $3 \cdot x = 15$

odnosno $x = 5$ cm. 1 BOD

Za zbroj opsega trokuta ABD i trokuta AEC vrijedi

$$2x + 2y + 2b = 30 \Rightarrow 2y + 2b = 30 - 2 \cdot 5 = 20 \text{ cm.} \quad 1 \text{ BOD}$$

Traženi opseg trokuta ABC jednak je $x + 2y + 2b = 5 + 2y + 2b = 5 + 20 = 25$ cm. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Budući da je $|AD| = |AE|$, trokut ADE je jednakokračan s osnovicom $\overline{DE}$, a krakovi tog trokuta prema uvjetu zadatka zatvaraju kut od 60° . Kutovi uz osnovicu su sukladni i veličina im je $(180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$. Dakle, trokut ADE je jednakostraničan sa stranicom duljine x . Taj način zaključivanja treba jednako vrednovati kao u ponuđenom rješenju s 1+1 odnosno 2 boda.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. veljače 2015.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Ako drugi mnogokut ima x stranica, onda prvi ima $x + 0.4x = 1.4x$ stranica. 2 BODA

Budući da je zbroj veličina svih unutarnjih kutova drugog mnogokuta za 1080° manji od zbroja veličina svih unutarnjih kutova prvog mnogokuta, može se pisati

$$(1.4x - 2) \cdot 180^\circ = (x - 2) \cdot 180^\circ + 1080^\circ / :180^\circ \quad 3 \text{ BODA}$$

$$1.4x - 2 = x - 2 + 6 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$0.4x = 6 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x = 15 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$1.4x = 21. \quad 1 \text{ BOD}$$

Riječ je o mnogokutima s 21 i 15 vrhova. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Ako prvi mnogokut ima x stranica, a drugi y stranica, onda vrijedi $x = 1.4y$. 2 BODA

Budući da je zbroj veličina svih unutarnjih kutova drugog mnogokuta za 1080° manji od zbroja veličina svih unutarnjih kutova prvog mnogokuta, može se pisati

$$(x - 2) \cdot 180^\circ = (y - 2) \cdot 180^\circ + 1080^\circ / :180^\circ \quad 3 \text{ BODA}$$

$$x - 2 = y - 2 + 6 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x = y + 6$$

$$1.4y = y + 6 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$0.4y = 6$$

$$y = 15 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x = 21. \quad 1 \text{ BOD}$$

Riječ je o mnogokutima s 21 i 15 vrhova. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja donosi 4 boda.

2. Prvi način:

Neka je traženi broj $\overline{xyz}$.

Vrijedi $100x + 10y + z + 10 \cdot (x + y + z) = 496$ odnosno $110x + 20y + 11z = 496$. 2 BODA

Kako su prva dva pribrojnika višekratnici broja 10 (završavaju s nulom), da bi ukupan zbroj mogao imati znamenku jedinica 6, znamenka z nužno mora biti 6. 2 BODA

$$110x + 20y + 66 = 496$$

$$110x + 20y = 430 : 10$$

$$11x + 2y = 43. \quad 1 \text{ BOD}$$

Znamenka x može biti samo 1, 2 ili 3, jer će inače zbroj biti veći od 43. 1 BOD

Za $x = 1$ dobije se $y = 16$ (znamenka y ne može biti dvoznamenkasti broj). 1 BOD

Za $x = 2$, dobije se $y = 10.5$ (što također nema smisla). 1 BOD

Za $x = 3$ dobije se $y = 5$. 1 BOD

Traženi broj je 356. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka je traženi broj $\overline{xyz}$.

Vrijedi $100x + 10y + z + 10 \cdot (x + y + z) = 496$ odnosno $110x + 20y + 11z = 496$. 2 BODA

Dalje je $11 \cdot (10x + z) = 496 - 20y$ što znači da $496 - 20y$ mora biti djeljivo s 11. 2 BODA

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$496 - 20y$	496	476	456	436	416	396	376	356	336	316

2 BODA

Samo je broj 396 djeljiv s 11 pa slijedi 1 BOD

$$11 \cdot (10x + z) = 396$$

$$10x + z = 36. \quad 1 \text{ BOD}$$

Dakle, $x = 3$ i $z = 6$. 1 BOD

Traženi broj je 356.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja donosi 4 boda.

3. Prvi način:

Među prvih 2015 prirodnih brojeva ima 1008 neparnih i 1007 parnih.

1 BOD

Zbroj dva prirodna broja je paran ako su oba parna ili oba neparna.

2 BODA

Parove parnih brojeva možemo izabrati na $\frac{1007 \cdot 1006}{2} = 1007 \cdot 503 = 506521$ načina.

3 BODA

Parove neparnih brojeva možemo izabrati na $\frac{1008 \cdot 1007}{2} = 504 \cdot 1007 = 507528$ načina.

3 BODA

Ukupan broj načina je $506\,521 + 507\,528 = 1\,014\,049$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Među prvih 2015 prirodnih brojeva ima 1008 neparnih i 1007 parnih.

1 BOD

Zbroj dva prirodna broja je paran ako su oba parna ili oba neparna.

2 BODA

Parove parnih brojeva možemo izabrati na $\frac{1007 \cdot 1006}{2}$ načina.

1 BOD

Parove neparnih brojeva možemo izabrati na $\frac{1008 \cdot 1007}{2}$ načina.

1 BOD

Ukupan broj načina je $\frac{1008 \cdot 1007}{2} + \frac{1007 \cdot 1006}{2} = \frac{1007}{2} \cdot (1008 + 1006) =$

2 BODA

$$= \frac{1007}{2} \cdot 2014 = 1007 \cdot 1007 =$$

2 BODA

$$= 1\,014\,049.$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Između 25 igrača kluba moguće je izabrati par igrača na $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ načina.

3 BODA

Dakle, slučajan događaj ima 300 elementarnih događaja.

1 BOD

Među tri sestre moguće je formirati $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ različita para. 3 BODA

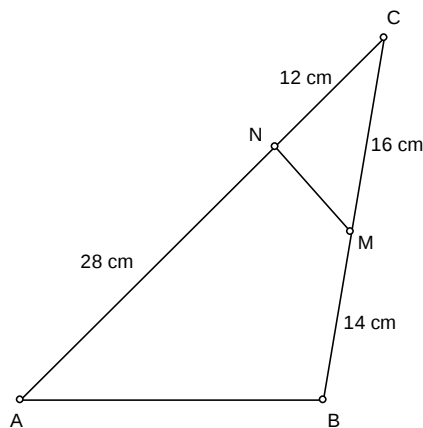
Dakle, broj povoljnih elementarnih događaja je 3. 1 BOD

Vjerojatnost da će biti izabran par sestara je $P = \frac{3}{300} = \frac{1}{100} = 0.01 = 1\%$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Kao ispravan odgovor ravnopravno prihvatiti 1 %, 0.01 ili $\frac{1}{100}$.

5. Skica



1 BOD

$$\frac{|AC|}{|MC|} = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}, \quad \frac{|BC|}{|NC|} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}. \quad 2 \text{ BODA}$$

Dakle, $\frac{|AC|}{|MC|} = \frac{|BC|}{|NC|}$ i zajednički kut pri vrhu C pa prema poučku S-K-S o sličnosti slijedi

$$\triangle MNC \sim \triangle ABC. \quad 2 \text{ BODA}$$

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle MNC}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{P_{\triangle MNC} + 252}{P_{\triangle MNC}} = \frac{25}{4} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$4 \cdot P_{\triangle MNC} + 1008 = 25 \cdot P_{\triangle MNC} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$21 \cdot P_{\triangle MNC} = 1008 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$P_{\triangle MNC} = 1008 : 21 = 48 \text{ cm}^2.$$

Površina trokuta MNC je 48 cm^2 .

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. veljače 2015.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izraz $x^2 - 1 = y^2 + 2014$ možemo pisati u obliku $x^2 - y^2 = 2015$ odnosno $(x - y) \cdot (x + y) = 2015$.

Kako su $x, y \in \mathbb{N}$, onda je $x - y < x + y$. 2 BODA

Broj $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ pa ga možemo napisati u obliku umnoška kao

$2015 = 1 \cdot 2015$, 1 BOD

$2015 = 5 \cdot 403$, 1 BOD

$2015 = 13 \cdot 155$, 1 BOD

$2015 = 31 \cdot 65$. 1 BOD

Iz $x - y = 1$ i $x + y = 2015$ dobivamo da je $x = 1008, y = 1007$. 1 BOD

Iz $x - y = 5$ i $x + y = 403$ dobivamo da je $x = 204, y = 199$. 1 BOD

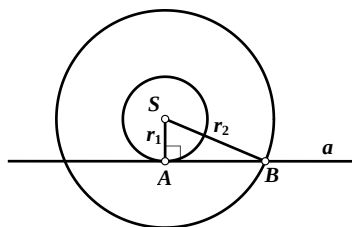
Iz $x - y = 13$ i $x + y = 155$ dobivamo da je $x = 84, y = 71$. 1 BOD

Iz $x - y = 31$ i $x + y = 65$ dobivamo da je $x = 48, y = 17$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako nije utvrđen uvjet $x - y < x + y$, potrebno je razmotriti svih 8 mogućnosti, a ako se to ne učini bodovati s najviše 6 bodova.

2.



Tangenta kružnice je okomita na polumjer u diralištu A pa je trokut SAB pravokutan. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut SAB dobivamo $|AB|^2 = r_2^2 - r_1^2$, 1 BOD

$100 = r_2^2 - r_1^2$. 1 BOD

Površina unutarnjeg kruga jednaka je $P_1 = r_1^2 \pi$, 1 BOD

a površina vanjskog kruga jednaka je $P_2 = r_2^2 \pi$ 1 BOD

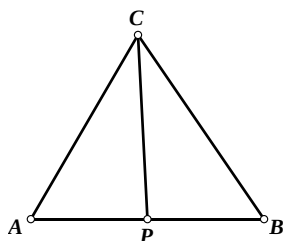
pa je površina kružnog vijenca jednaka $P = P_2 - P_1 = r_2^2 \pi - r_1^2 \pi$ 2 BODA

$$P = (r_2^2 - r_1^2) \pi = 100\pi \quad 2 \text{ BODA}$$

$$P \approx 314 \text{ cm}^2. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

3.



Promatramo trokut APC . Njegove stranice imaju duljine $|AP| = 24 \text{ cm}$, $|PC| = 18 \text{ cm}$ i $|CA| = 30 \text{ cm}$. 1 BOD

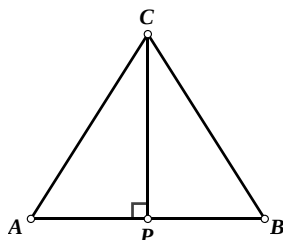
Zbroj površina kvadrata konstruiranih nad dvjema kraćim stranicama je

$$18^2 + 24^2 = 324 + 576 = 900. \quad 1 \text{ BOD}$$

Površina kvadrata nad njegovom najduljom stranicom je $30^2 = 900$. 1 BOD

Budući da je $18^2 + 24^2 = 30^2$, prema obratu Pitagorinog poučka zaključujemo da je trokut APC

pravokutan s pravim kutom pri vrhu P . 2 BODA



Trokuti $\triangle APC$ i $\triangle BPC$ su pravokutni i imaju zajedničku katetu $\overline{CP}$, a prema uvjetu zadatka vrijedi $|AP| = |BP|$.

Prema poučku S-K-S o sukladnosti slijedi da je $\triangle APC \cong \triangle BPC$ 1 BOD

pa je $|AC| = |BC| = 30 \text{ cm}$, tj. trokut ABC je jednakokrakan s osnovicom $\overline{AB}$. 1 BOD

Opseg trokuta ABC jednak je $O = 48 + 2 \cdot 30 = 108$ cm. 1 BOD

Budući da je $\overline{CP} \perp \overline{AB}$, težišnica $\overline{CP}$ ujedno je i visina iz vrha C .

Površina trokuta ABC jednaka je $P_{ABC} = \frac{|\overline{AB}| \cdot |\overline{CP}|}{2} = \frac{48 \cdot 18}{2} = 432$ cm². 2 BODA

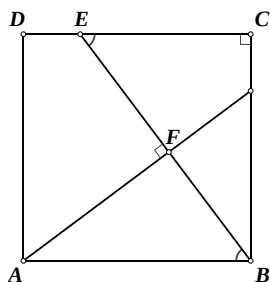
..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Trokut ABF je pravokutan, a hipotenuza tog trokuta je stranica kvadrata $ABCD$. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut ABF dobivamo $|\overline{AB}|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, tj. duljina stranice

kvadrata je $|\overline{AB}| = 5$ cm. 1 BOD



Pravac EB je presječnica paralelnih pravaca AB i CD pa je $\angle FBA \cong \angle BEC$. 2 BODA

Pravokutni trokuti $\triangle ABF$ i $\triangle BEC$ imaju dva para sukladnih kutova ($\angle FBA \cong \angle BEC$ i $\angle AFB \cong \angle ECB$) pa su prema poučku K-K o sličnosti ta dva trokuta slična. 3 BODA

Duljine odgovarajućih stranica trokuta $\triangle ABF$ i $\triangle BEC$ su proporcionalne, tj. vrijedi

$|\overline{BF}| : |\overline{EC}| = |\overline{AF}| : |\overline{BC}|$. 1 BOD

Uvrštavanjem poznatih podataka nalazimo $3 : |\overline{EC}| = 4 : 5$, 1 BOD

a onda slijedi $|\overline{EC}| = 15 : 4 = 3.75$ cm. 1 BOD

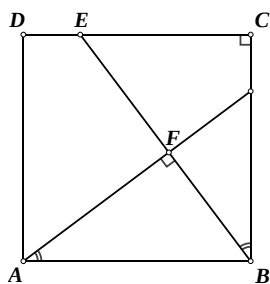
..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Trokut ABF je pravokutan, a hipotenuza tog trokuta je stranica kvadrata $ABCD$. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut ABF dobivamo $|\overline{AB}|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, tj. duljina stranice

kvadrata je $|\overline{AB}| = 5$ cm. 1 BOD



Budući da je $AF \perp BF$ i $AB \perp CB$, šiljasti kutovi $\angle BAF$ i $\angle CBE$ imaju međusobno okomite

krakove, tj. kutovi $\angle BAF$ i $\angle CBE$ su sukladni.

2 BODA

Pravokutni trokuti $\triangle ABF$ i $\triangle BEC$ imaju dva para sukladnih kutova ($\angle BAF \cong \angle CBE$ i

$\angle AFB \cong \angle ECB$) pa su prema poučku K-K o sličnosti ta dva trokuta slična.

3 BODA

Duljine odgovarajućih stranica trokuta $\triangle ABF$ i $\triangle BEC$ su proporcionalne, tj. vrijedi

$$|BF| : |EC| = |AF| : |BC|.$$

1 BOD

Uvrštavanjem poznatih podataka nalazimo $3 : |EC| = 4 : 5$,

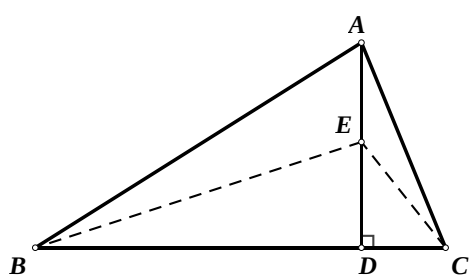
1 BOD

a onda slijedi $|EC| = 15 : 4 = 3.75$ cm.

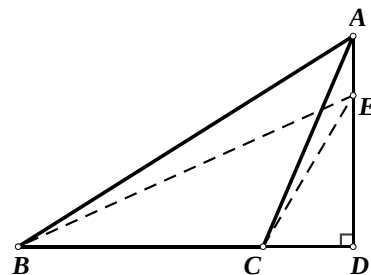
1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Na slici je moguće uočiti četiri pravokutna trokuta BDE , EDC , BDA i ADC .



ili



1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokute BDA i BDE dobivamo

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2,$$

1 BOD

$$|EB|^2 = |ED|^2 + |BD|^2$$

1 BOD

pa je $|AB|^2 - |EB|^2 = |AD|^2 - |ED|^2$.

2 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka na trokute ADC i EDC dobivamo

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2,$$

1 BOD

$$|EC|^2 = |ED|^2 + |DC|^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{pa je } |AC|^2 - |EC|^2 = |AD|^2 - |ED|^2. \quad 2 \text{ BODA}$$

Iz $|AB|^2 - |EB|^2 = |AD|^2 - |ED|^2$ i $|AC|^2 - |EC|^2 = |AD|^2 - |ED|^2$ slijedi tvrdnja, tj.

$$|AB|^2 - |EB|^2 = |AC|^2 - |EC|^2. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako nisu skicirani ili spomenuti i šiljastokutni i tupokutni trokut, nego samo jedan od njih, bodovati s najviše 8 bodova.