

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. siječnja 2019.

4. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Iz druge i treće jednakosti može se zaključiti da je $\diamond = 33 - 25 = 8$. 2 BODA

Iz druge jednakosti može se zaključiti da je $\heartsuit = 25 - 8 = 17$. 2 BODA

Iz prve jednakosti zaključujemo da je $\triangle = 20 - 17 = 3$. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

Sastavimo tablicu:

	dječaci	djevojčice
1. tjedan	39	23
nakon 1. tjedna	45	31
nakon 2. tjedna	51	39
nakon 3. tjedna	57	47
nakon 4. tjedna	63	55
nakon 5. tjedna	69	63
nakon 6. tjedna	75	71
nakon 7. tjedna	81	79
nakon 8. tjedna	87	87

(tablica) 4 BODA

Nakon osam tjedana bit će isti broj djevojčica i dječaka. 1 BOD

$$87 + 87 = 174$$

Nakon osam tjedana u skupini će biti 174 djece. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko natjecatelj ima samo djelomično točnu tablicu, treba mu proporcionalno umanjiti bodove za tablicu.

Drugi način:

U plesnoj skupini „Pirueta“ broj dječaka je za $39 - 23 = 16$ veći od broja djevojčica. 1 BOD

Svaki tjedan skupini se pridruže $8 - 6 = 2$ djevojčice više nego dječaka. 1 BOD

Broj djevojčica i dječaka bit će jednak nakon $16 : 2 = 8$ tjedana. 1 BOD

Ukupan broj dječaka bit će $39 + 8 \cdot 6 = 39 + 48 = 87$. Toliko će biti i djevojčica.

(ili: Ukupan broj djevojčica bit će $23 + 8 \cdot 8 = 23 + 64 = 87$. Toliko će biti i dječaka.) 2 BODA

Ukupan broj članova bit će $2 \cdot 87 = 174$. 1 BOD

(Alternativno: Ukupan broj članova bio je $39 + 23 = 62$.

U 8 tjedana pridruži im se još $(6 + 8) \cdot 8 = 14 \cdot 8 = 112$ novih članova. 2 BODA

Ukupan broj članova bit će $62 + 112 = 174$. 1 BOD)

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Računamo unatrag:

$$3 \cdot 7 = 21 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$21 + 6 = 27 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$27 : 9 = 3 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$3 \cdot 2 = 6 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$6 - 5 = 1 \quad 1 \text{ BOD}$$

Traženi broj je 1. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

(**Napomena:** Ako je učenik napisao da je rješenje broj 1 te je samo provjerio točnost tog rješenja, treba dobiti 2 BODA.)

4. Prvi način:

Ako su oba brata pročitala 15 istih stripova, onda je Marko pročitao $34 - 15 = 19$ stripova koje nije pročitao Petar, a Petar je pročitao $27 - 15 = 12$ stripova koje nije pročitao Marko. 2 BODA

Kad se zbroje stripovi koje su pročitali samo Marko, samo Petar te oba brata zajedno, dobije se $19 + 12 + 15 = 46$. 2 BODA

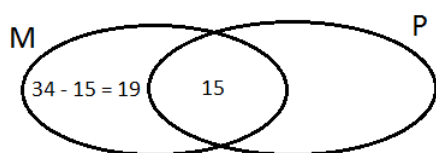
$$67 - 46 = 21 \quad 1 \text{ BOD}$$

Nepročitano je 21 strip. 1 BOD

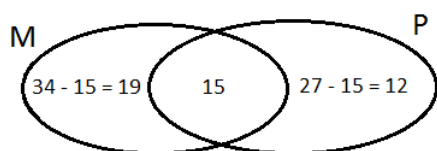
..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Prikažimo dijagramom broj stripova koje imaju Marko i Petar.



1 BOD



1 BOD

$$19 + 12 + 15 = 46$$

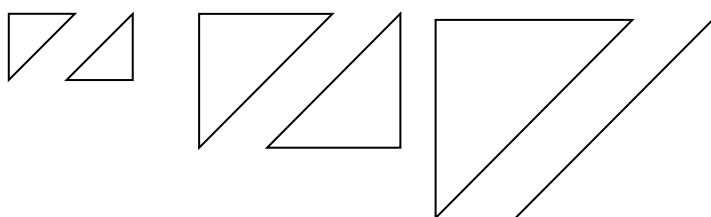
Ukupno je pročitano 46 stripova. 2 BODA

$$67 - 46 = 21 \quad 1 \text{ BOD}$$

Nepročitano je 21 strip. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

5.

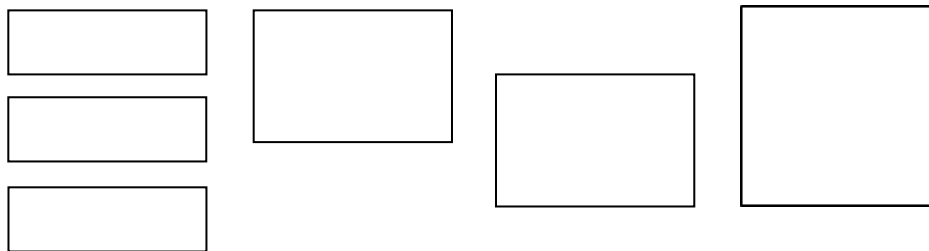


(slika)

1 BOD

Ima 6 trokuta.

1 BOD



(slika)

2 BODA

(**Napomena 1:** Ako na slici nedostaje kvadrat, sliku bodovati samo s jednim bodom.)

Ima 6 pravokutnika.

1 BOD

(**Napomena 2:** Odgovor „Ima 5 pravokutnika i 1 kvadrat.“ ne smatra se točnim i ne boduje se jednim bodom.)

Na slici je jednak broj trokuta i pravokutnika.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Od 1.siječnja u 10 sati do 1.travnja u 10 sati proći će ukupno $31 + 28 + 31 = 90$ dana. 1 BOD

Od 1. travnja u 10 sati do 9.travnja u 10 sati proći će još 8 dana, ukupno 98 dana. 1 BOD

U tih 98 dana ima ukupno $98 : 14 = 7$ kašnjenja po 12 sekundi. 2 BODA

Ukupno kašnjenje je $7 \cdot 12 = 84$ sekunde. 1 BOD

84 sekunde = 1 minuta i 24 sekunde 2 BODA

Zbog kašnjenja, od stvarnog vremena (10 sati) treba oduzeti 1 minutu i 24 sekunde. 1 BOD

Vrijeme koje pokazuje ura je 9 sati 58 minuta i 36 sekundi. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:

Za 6 sati automobil će prijeći $6 \cdot 82 \text{ km} = 492 \text{ km}$, 2 BODA

a kamion $6 \cdot 63 \text{ km} = 378 \text{ km}$. 2 BODA

Udaljenost između automobila i kamiona bit će $492 \text{ km} - 378 \text{ km} = 114 \text{ km}$. 2 BODA

Automobilu preostaje prijeći $525 \text{ km} - 492 \text{ km} = 33 \text{ km}$, 2 BODA

a kamionu preostaje $525 \text{ km} - 378 \text{ km} = 147 \text{ km}$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Razlika u brzinama automobila i kamiona je $82 - 63 = 19$ kilometara na sat.

To znači da svaki sat automobil prijeđe 19 kilometara više od kamiona. 1 BOD

Za 6 sati automobil prijeđe $6 \cdot 19 = 114$ kilometara više od kamiona.

Nakon 6 sati udaljenost između automobila i kamiona bit će 114 kilometara. 1 BOD

Za 6 sati kamion će prijeći $6 \cdot 63 = 378$ kilometara. 2 BODA

Za 6 sati automobil će prijeći $378 + 114 = 492$ kilometra. 2 BODA

Automobilu preostaje prijeći $525 \text{ km} - 492 \text{ km} = 33 \text{ km}$, 2 BODA

a kamionu preostaje $525 \text{ km} - 378 \text{ km} = 147 \text{ km}$. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. siječnja 2019.

5. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$$\begin{aligned} & 698 \cdot 134 - 260 : 2 \cdot 698 + (13 \cdot 49 + 7 \cdot 9) - 456 : 228 = \\ & = 698 \cdot 134 - 130 \cdot 698 + (637 + 63) - 2 = & 2 \text{ BODA} \\ & = 698 \cdot (134 - 130) + 700 - 2 = & 1 \text{ BOD} \\ & = 698 \cdot 4 + 698 = & 1 \text{ BOD} \\ & = 698 \cdot (4 + 1) = 698 \cdot 5 = & 1 \text{ BOD} \\ & = 3\,490 & 1 \text{ BOD} \\ & \dots\dots\dots \text{UKUPNO 6 BODOVA} \end{aligned}$$

Drugi način:

$$\begin{aligned} & 698 \cdot 134 - 260 : 2 \cdot 698 + (13 \cdot 49 + 7 \cdot 9) - 456 : 228 = \\ & = 698 \cdot 134 - 130 \cdot 698 + (637 + 63) - 2 = & 2 \text{ BODA} \\ & = 93\,532 - 90\,740 + 700 - 2 & 3 \text{ BODA} \\ & = 2\,792 + 700 - 2 \\ & = 3\,492 - 2 \\ & = 3\,490 & 1 \text{ BOD} \\ & \dots\dots\dots \text{UKUPNO 6 BODOVA} \end{aligned}$$

2. Jednoznamenkastim brojevima su označene stranice 1 - 9.

Za njih je potrebno 9 znamenki. 1 BOD
Dvoznamenkastim brojevima je označeno 90 stranica 10 - 99. Za te stranice je potrebno
 $2 \cdot 90 = 180$ znamenki. 1 BOD
Za ostale stranice potrebno je $2\,019 - (9 + 180) = 2\,019 - 189 = 1\,830$ znamenki. 1 BOD
Troznamenkastih rednih brojeva stranica ima $1\,830 : 3 = 610$. 1 BOD
To su stranice 100 - 709. 1 BOD
Knjiga ima 709 označenih stranica. 1 BOD
UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

Označimo s x broj uzastopnih večeri koje je Luka imao izvrstan nastup.
Tada je $10 - x$ večeri imao dobar nastup. 2 BODA
Iz uvjeta zadatka slijedi da je $x \cdot 500 + (10 - x) \cdot 300 = 3\,600$. 2 BODA
odnosno $200 \cdot x = 600$, tj. $x = 3$, dakle, Luka je 3 večeri imao izvrstan nastup. 2 BODA
UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik ima točan rezultat bez obrazloženja, dobiva 3 BODA, ukoliko je napisao provjeru da to rješenje zadovoljava uvjete zadatka dobiva 4 BODA, a ukoliko je, na bilo koji način (npr. kao što je to gore opisano) **dokazao** da je to jedino rješenje, dobiva svih 6 BODOVA.

Drugi način:

Za svih 10 nastupa Luka je sigurno dobio $10 \cdot 300 = 3\,000$ kuna.	2 BODA
Izvrstan nastup plaća se dodatnih $500\text{ kn} - 300\text{ kn} = 200\text{ kn}$.	1 BOD
Razliku $3\,600\text{ kn} - 3\,000\text{ kn} = 600\text{ kn}$ ostvario je za izvrsne nastupe.	1 BOD
Broj izvrsnih nastupa je $600\text{ kn} : 200\text{ kn} = 3$.	2 BODA
.....	UKUPNO 6 BODOVA

4. Najveći troznamenkasti parni broj s različitim znamenkama je 986, 1 BOD
 a najmanji troznamenkasti neparni broj s različitim znamenkama je 103. 1 BOD
 Njihov je zbroj 1 089, a razlika 883. 2 BODA
 Traženi umnožak iznosi 961 587. 2 BODA
 UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

Neka je x nepoznati broj.	
$56 + 57 + 58 + \dots + 105 + 106 = x + 2\,112$	1 BOD
Prema Gaussovoj dosjetci:	
$106 \cdot 107 : 2 - 55 \cdot 56 : 2 =$	2 BODA
$= 5\,671 - 1\,540$	
$= 4\,131$	1 BOD
$4\,131 = x + 2\,112$	
$x = 4\,131 - 2\,112$	1 BOD
$x = 2\,019$	1 BOD
.....	UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka je x nepoznati broj.	
$56 + 57 + 58 + \dots + 105 + 106 = x + 2\,112$	1 BOD
Prema Gaussovoj dosjetci:	
$25 \cdot 161 + 106 =$	2 BODA
$= 4\,025 + 106$	
$= 4\,131$	1 BOD
$4\,131 = x + 2\,112$	
$x = 4\,131 - 2\,112$	1 BOD
$x = 2\,019$	1 BOD
.....	UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Neka je x nepoznati broj.	
$56 + 57 + 58 + \dots + 105 + 106 = x + 2\,112$	1 BOD
Prema Gaussovoj dosjetci:	
$(51 \cdot 162) : 2 =$	2 BODA
$= 8\,262 : 2$	
$= 4\,131$	1 BOD
$4\,131 = x + 2\,112$	
$x = 4\,131 - 2\,112$	1 BOD
$x = 2\,019$	1 BOD
.....	UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:

$$D(7,8) = 1, \quad D(8,9) = 1, \quad D(7,9) = 1$$

Neki broj će istovremeno biti djeljiv brojevima 7, 8 i 9 ako i samo ako je djeljiv njihovim umnoškom.

2 BODA

$$7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$$

2 BODA

$$20 \cdot 504 = 10\,080 \text{ (peteroznamenkast), dok je } 19 \cdot 504 = 9\,576 \text{ (četveroznamenkast).}$$

2 BODA

Najmanji peteroznamenasti prirodni broj koji je djeljiv istovremeno sa 7, 8 i 9 je 10 080. 1 BOD

$$198 \cdot 504 = 99\,792 \text{ (peteroznamenast), dok je } 199 \cdot 504 = 100\,296 \text{ (šesteroznamenast).}$$

2 BODA

Najveći peteroznamenasti prirodni broj koji je djeljiv istovremeno sa 7, 8 i 9 je 99 792. 1 BOD

.....UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

$$D(7,8) = 1, \quad D(8,9) = 1, \quad D(7,9) = 1$$

Neki broj će istovremeno biti djeljiv brojevima 7, 8 i 9 ako i samo ako je djeljiv njihovim umnoškom.

2 BODA

$$7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$$

2 BODA

$$10000 : 504 = 19$$

$$4960$$

$$424$$

$$20 \cdot 504 = 10\,080$$

2 BODA

Najmanji peteroznamenasti prirodni broj koji je djeljiv istovremeno sa 7, 8 i 9 je 10 080. 1 BOD

Najveći peteroznamenasti broj djeljiv brojem 504 može se odrediti tako da se broj 99 999 umanjuje za ostatak pri dijeljenju broja 9 999 brojem 504.

$$99999 : 504 = 198$$

$$4959$$

$$4239$$

$$207$$

Najveći peteroznamenasti prirodni broj koji je djeljiv istovremeno sa 7, 8 i 9 je

$$99\,999 - 207 = 99\,792.$$

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:

Izražavanje duljina stranica pravokutnika u centimetrima:

$$4 \text{ m} = 400 \text{ cm}, \quad 2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$$

1 BOD

$$\text{Površina tla plastenika: } 400 \cdot 200 = 80\,000 \text{ cm}^2$$

1 BOD

$$\text{Površina dna vaze s maćuhicama: } 10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$$

1 BOD

$$\text{Površina dna vaze s tratinčicama: } 20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$$

1 BOD

Označimo li sa x broj vaza s tratinčicama, tada vaza s maćuhicama ima $3 \cdot x$.

1 BOD

$$x \cdot 400 + 3 \cdot x \cdot 100 = 80\,000$$

1 BOD

$$400 \cdot x + 300 \cdot x = 80\,000$$

$$700 \cdot x = 80\,000$$

1 BOD

Djelomični količnik brojeva 80 000 i 700 je 114.

1 BOD

U plasteniku će se nalaziti 114 vaza s tratinčicama.

1 BOD

$$3 \cdot 114 = 342$$

U plasteniku će se nalaziti 342 vaze s maćuhicama.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

$$\text{Površina tla plastenika: } 4 \cdot 2 = 8 \text{ m}^2$$

1 BOD

$$\text{Površina dna vaze s maćuhicama: } 10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$$

1 BOD

$$\text{Površina dna vaze s tratinčicama: } 20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$$

1 BOD

Izražavanje površine tla plastenika u cm^2 :

$$8 \text{ m}^2 = 80\,000 \text{ cm}^2$$

1 BOD

Označimo li sa x broj vaza s tratinčicama, tada vaza s maćuhicama ima $3 \cdot x$.

1 BOD

$$x \cdot 400 + 3 \cdot x \cdot 100 = 80\,000$$

1 BOD

$$400 \cdot x + 300 \cdot x = 80\,000$$

$$700 \cdot x = 80\,000$$

1 BOD

Djelomični količnik brojeva 80 000 i 700 je 114.

1 BOD

U plasteniku će se nalaziti 114 vaza s tratinčicama.

1 BOD

$$3 \cdot 114 = 342$$

U plasteniku će se nalaziti 342 vaze s maćuhicama.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. siječnja 2019.

6. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I Taj postupak BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $\left(\frac{5}{3}-1\right):\frac{1}{6}+\left(\frac{20}{7}-2\right)\cdot 14-1\frac{1}{2}:\left(1-\frac{1}{2}\right)=$

$$=\frac{2}{3}:\frac{1}{6}+\frac{6}{7}\cdot 14-\frac{3}{2}:\frac{1}{2}$$

3 BODA

$$=\frac{2}{3}\cdot 6+\frac{6}{7}\cdot 14-\frac{3}{2}\cdot 2$$

$$=4+12-3$$

2 BODA

$$=16-3$$

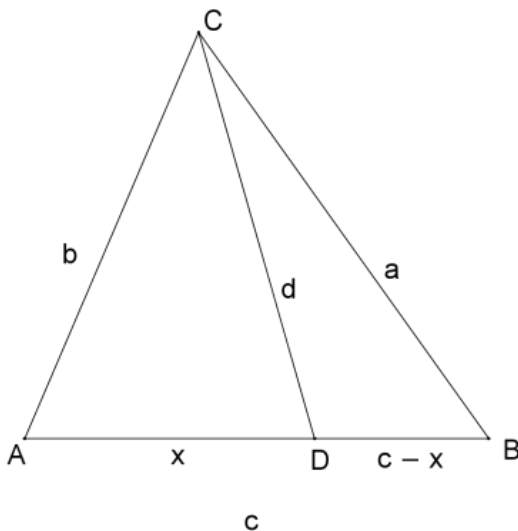
$$=13$$

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Skica trokuta podijeljena zadanom dužinom na dva trokuta:

1 BOD



Opseg zadanog trokuta manji je od zbroja opsega dvaju dobivenih trokuta za dvije duljine dužine koja je početni trokut podijelila na dva nova trokuta.

2 BODA

Dakle, vrijedi da je:

$$2d = 41 + 25 - 55$$

1 BOD

$$2d = 11$$

$$d = 5.5 \text{ mm}$$

1 BOD

Tražena duljina zadane dužine iznosi 5.5 mm.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

Istanbul je istočnije od Zagreba, a vremenska razlika je 2 sata pa je u Istanbulu bilo 2 sata više nego u Zagrebu kad su poletjeli, odnosno subota, 22:00. 1 BOD

Ako je let trajao $2\frac{1}{12}$ sata, a dvanaestina sata je $60 : 12 = 5$ minuta, u Istanbul su sletjeli za 2 sata i 5 minuta, tj. u nedjelju u 00:05. 1 BOD

Na let za New York čekali su 7 sati što znači da su poletjeli u nedjelju u 07:05. 1 BOD

New York je zapadnije od Istanbula i vremenska razlika je 8 sati pa je u New Yorku bilo 8 sati manje nego u Istanbulu kad su poletjeli, odnosno bila je subota, 23:05 1 BOD

Ako je let do New Yorka trajao $11\frac{5}{12}$ sata, a dvanaestina sata je 5 minuta, trajanje leta je 11 sati i 25 minuta. 1 BOD

Konačno, kad je njihov avion sletio, u New Yorku je bila nedjelja, 10 sati i 30 minuta (10:30).

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Ukupno trajanje putovanja je $2\frac{1}{12} + 7 + 11\frac{5}{12} = 20\frac{6}{12} = 20\frac{1}{2} = 20.5$ sata. 1 BOD

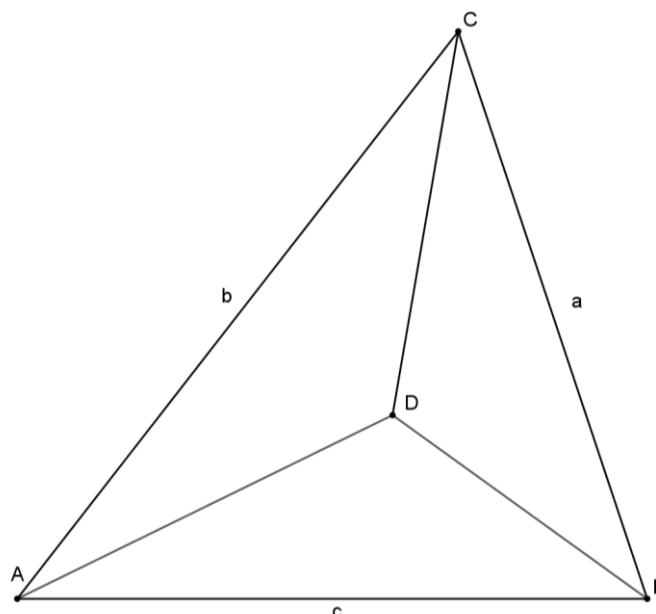
Kako su krenuli iz Zagreba u Istanbul, a Istanbul je istočnije, zbog vremenske razlike od 2 sata na 20.5 sati treba dodati 2 sata, što iznosi 22.5 sata. 2 BODA

Kako je vremenska razlika Istanbula i New Yorka 8 sati, a New York je zapadnije, zbog vremenske razlike od 8 sati od 22.5 sati treba oduzeti 8 sati, što iznosi 14.5 sati. 2 BODA

Od 20:00 do ponoći su 4 sata, dakle kad su stigli u New York bila je nedjelja, 10:30. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

4.



Skica:

1 BOD

Neka se, primjerice, simetrale povučene iz vrhova A i B sijeku pod kutom od 111° , a simetrale povučene iz vrhova A i C pod kutom od 122° .

U trokutu ABD vrijedi $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 111^\circ = 180^\circ$, odnosno $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 69^\circ$. Tada je $\alpha + \beta = 138^\circ$. 1 BOD

- Iz trokuta ABC slijedi da je $\gamma = 180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$. 1 BOD
 U trokutu ACD vrijedi $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + 122^\circ = 180^\circ$, odnosno $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 58^\circ$. Tada je $\alpha + \gamma = 116^\circ$. 1 BOD
 Iz trokuta ABC slijedi da je $\beta = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$. 1 BOD
 Onda je $\alpha = 180^\circ - (42^\circ + 64^\circ) = 74^\circ$. Kutovi su 42° , 64° i 74° . 1 BOD
 UKUPNO 6 BODOVA

5. Neka je x broj zahvalnica koje je učitelj pripremio.

Za sudjelovanje mu se prijavilo $x + \frac{2}{13}x = \frac{15}{13}x$ učenika. 1 BOD

Na Večer matematike je došlo $\frac{14}{15}$ tog broja, tj. $\frac{14}{15} \cdot \frac{15}{13}x = \frac{14}{13}x$ učenika. 2 BODA

To je za $\frac{1}{13}$ više od broja pripremljenih zahvalnica.

Iz $\frac{1}{13}x = 20$, dobije se $x = 260$. 2 BODA

Na Večeri matematike sudjelovalo je 280 učenika. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Označimo prvi pribrojnik s x . Tada je:

1. broj: x

2. broj: $x + 5$

3. broj: $x + 5 + 5 = x + 2 \cdot 5$

...

50. broj: $x + 49 \cdot 5$ 2 BODA

$50x + (1 + 2 + 3 + \dots + 49) \cdot 5 = 8\,625$ 1 BOD

$1 + 2 + 3 + \dots + 49 = (50 \cdot 49) : 2 = 1\,225$ (Gaussova dosjetka) 2 BODA

$50x + 1225 \cdot 5 = 8\,625$ 1 BOD

$50x + 6125 = 8\,625$

$50x = 2\,500$

$x = 50$ 2 BODA

$50 + 49 \cdot 5 = 50 + 245 = 295$ 1 BOD

Najmanji pribrojnik je 50, a najveći 295. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Broj je djeljiv brojem 18 ako je djeljiv brojevima 9 i 2. 1 BOD

Broj je djeljiv brojem 2 ako završava znamenkom 0, 2, 4, 6 ili 8.

Prema uvjetu zadatka vrijedi $c = 2$. 1 BOD

Budući da broj počinje i završava znamenkom a te da različita slova predstavljaju različite znamenke mora biti $a = 4, 6, 8$. 1 BOD

Broj je djeljiv brojem 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv brojem 9. 1 BOD

1. slučaj:

$a = 4$

Zbroj $4 + b + 2 + d + 4 = 10 + b + d$ mora biti djeljiv brojem 9, tj. mora biti $b + d = 8$ ili $b + d = 17$.

Ako je $b + d = 8$ postoje sljedeće mogućnosti:

<i>b</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>d</i>	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	Da	Da	Ne	Da	Ne	Da	Ne	Da	Da

Tri mogućnosti ne vrijede zbog ponavljanja znamenaka pa ovaj slučaj zadovoljavaju brojevi: 40284, 41274, 43254, 45234, 47214 i 48204.

Ako je $b + d = 17$ postoje sljedeće mogućnosti:

<i>b</i>	9	8
<i>d</i>	8	9
	Da	Da

Ovaj uvjet zadovoljavaju brojevi: 48294 i 49284.

2. slučaj:

$$a = 6$$

Zbroj $6 + b + 2 + d + 6 = 14 + b + d$ mora biti djeljiv brojem 9, tj. mora biti $b + d = 4$ ili $b + d = 13$.

Ako je $b + d = 4$ postoje sljedeće mogućnosti:

<i>b</i>	0	1	2	3	4
<i>d</i>	4	3	2	1	0
	Da	Da	Ne	Da	Da

Jedna mogućnost ne vrijedi zbog ponavljanja znamenaka pa drugi uvjet zadovoljavaju brojevi: 60246, 61236, 63216 i 64206.

Ako je $b + d = 13$ postoje sljedeće mogućnosti:

<i>b</i>	4	5	6	7	8	9
<i>d</i>	9	8	7	6	5	4
	Da	Da	Ne	Ne	Da	Da

Dvije mogućnosti ne vrijede zbog ponavljanja znamenaka pa ovaj uvjet zadovoljavaju brojevi: 64296, 65286, 68256 i 69246.

3. slučaj:

$$a = 8$$

Zbroj $8 + b + 2 + d + 8 = 18 + b + d$ mora biti djeljiv brojem 9, tj. mora biti $b + d = 0$, $b + d = 9$ ili $b + d = 18$.

Kako je $b + d = 0$ samo za $b = d = 0$, a $b + d = 18$ samo za $b = d = 9$ oba slučaja ne vrijede zbog ponavljanja znamenaka.

Ako je $b + d = 9$ postoje sljedeće mogućnosti:

<i>b</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>d</i>	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	Da	Ne	Ne	Da	Da	Da	Da	Ne	Ne	Da

Dvije mogućnosti ne vrijede zbog ponavljanja znamenaka pa treći slučaj zadovoljavaju brojevi: 80298, 83268, 84258, 85248, 86238 i 89208.

Dakle ukupno postoje 22 broja koji zadovoljavaju uvjete. To su: 40284, 41274, 43254, 45234, 47214, 48204, 48294, 49284, 60246, 61236, 63216, 64206, 64296, 65286, 68256, 69246, 80298, 83268, 84258, 85248, 86238 i 89208.

Ispisivanje svih rješenja donosi:

6 BODOVA

Ukoliko natjecatelj nije ispisao sva moguća rješenja broj bodova se dodjeljuje na sljedeći način:

1-5 rješenja	1 BOD
6-9 rješenja	2 BODA
10-13 rješenja	3 BODA
14-17 rješenja	4 BODA
18-21 rješenje	5 BODOVA
22 rješenja	6 BODOVA

Ukoliko je natjecatelj ispisao sva rješenja bez raspisivanja po slučajevima ostvaruje na ovom dijelu zadatka svih 6 BODOVA.

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko natjecatelj ima zapisane sve brojeve koji udovoljavaju uvjetima zadatka, bez uvodnog obrazloženja (pravila djeljivosti brojem 18 te zaključak o vrijednosti znamenaka a i c), ostvaruje UKUPNO 6 BODOVA.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. siječnja 2019.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka su a, b, c, d, e zadani brojevi.

Iz $\frac{a+b+c}{3} = 19$ slijedi da je $a + b + c = 57$. 1 BOD

Iz $\frac{a+b+c+d+e}{5} = 20$ slijedi da je $a + b + c + d + e = 100$. 1 BOD

Uspoređivanjem se dobije da je $d + e = 43$, a zadano je $d \cdot e = 456$. 1 BOD

Broj 456 rastavimo na proste faktore: $456 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19$. 1 BOD

Kombiniranjem prostih faktora dobijemo brojeve 24 i 19 koji zadovoljavaju uvjet $24 + 19 = 43$.

Posljednja dva broja u nizu su 24 i 19. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

Neka je c cijena proizvoda prije obje promjene.

Nakon uvećanja od 10 % cijena proizvoda će biti $c_1 = 110 \% c$, 1 BOD

a nakon smanjenja od 30 % cijena će biti $c_2 = 70 \% c_1$. 1 BOD

Cijena nakon obje promjene bit će $c_2 = 0.7 \cdot 1.1 \cdot c = 0.77 \cdot c = 77 \% c$. 1 BOD

Znači, cijena će nakon obje promjene biti **niža** u odnosu na početnu i to za 23 % (100 % – 77 %). 2 BODA

Cijena nakon obje promjene bit će $0.77 \cdot 2\,019 = 1\,554.63$ kn ili 1 554 kn i 63 lp. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Cijena proizvoda nakon povećanja od 10 % bit će $110 \% \cdot 2\,019 = 2\,220.90$ kn. 1 BOD

Nakon sniženja od 30 % bit će $70 \% \cdot 2\,220.90 = 1\,554.63$ kn. 1 BOD

Razlika cijena prije i nakon obje promjene je $2\,019 - 1\,554.63 = 464.37$ kn, 1 BOD

a to je $p \% = \frac{464.37}{2\,019} = 23 \%$. 2 BODA

Znači, cijena će nakon obje promjene biti **niža** u odnosu na početnu i to za 23 %. 1 BOD

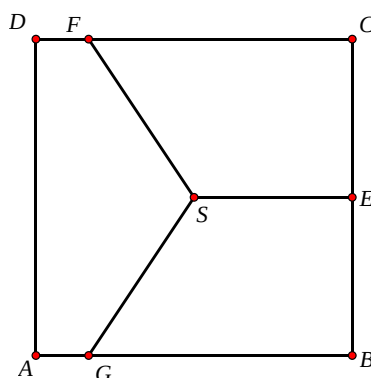
..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

Kako su površine triju poligona (dvaju četverokuta i peterokuta) koji tvore kvadrat jednake, onda je

svaka od površina jednaka $\frac{1}{3} \text{ m}^2$. 1 BOD

To posebice znači da je površina trapeza $FCES$ jednaka $\frac{1}{3} \text{ m}^2$.



Iz uvjeta zadatka znamo da je S središte kvadrata i E polovište stranice $\overline{BC}$, pa mora biti

$$|SE| = |EC| = \frac{1}{2} \text{ m.} \quad 2 \text{ BODA}$$

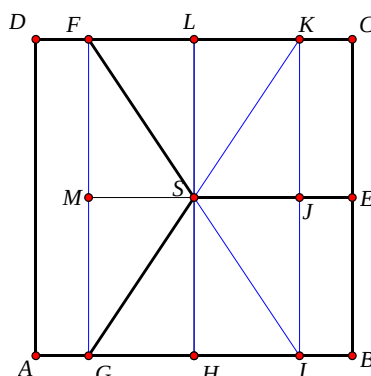
Površina trapeza $FCES$ može se izračunati iz izraza $p_{FCES} = \frac{|FC| + |SE|}{2} \cdot |EC|$,

$$\text{pa slijedi } \frac{1}{4} \cdot \left(|FC| + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{odnosno } |FC| = \frac{5}{6} \text{ m.} \quad 2 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:



Neka je točka K na stranici $\overline{CD}$ takva da je $|DF| = |KC|$ i točka I na stranici $\overline{AB}$ takva da je $|AG| = |IB|$. Nadalje, neka su točke L i H polovišta dužina $\overline{FK}$ i $\overline{GI}$, točke M i J sjecišta pravca $\overline{ES}$ sa stranicama pravokutnika $FKIG$.

Prema poučku S-K-S trokuti SLF , SLK , SJK , SMG , SMF su sukladni i imaju jednake površine; označimo tu površinu s P_1 . 1 BOD

Četverokut $AGFD$ je dvaput veće površine od četverokuta $JECK$; označimo njegovu površinu s P_2 . 1 BOD

Iz uvjeta jednakosti površina poligona $SFDAG$ i $SECF$ slijedi da je

$$2P_1 + 2P_2 = 3P_1 + P_2, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{pa slijedi da je } P_1 = P_2. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Iz toga slijedi da je } |FL| = |LK| = 2|KC|. \quad 1 \text{ BOD}$$

Kako je $|KC| = |FD|$ i $|FL| + |LK| + |KC| + |FD| = 1$, slijedi da je $|FC| = \frac{5}{6}$ m. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. $\frac{21}{26} = 21 : 26 = 0.8076923\ 076923\ 076923\ \dots = 0.8\dot{0}76923$ 2 BODA

Period ima 6 znamenki (076923). 1 BOD

Prva znamenka iza decimalne točke je 8 i ona se ne ponavlja. 1 BOD

$2019 - 1 = 2018$

$2018 : 6 = 336$ i ostatak 2 1 BOD

2019. znamenka iza decimalne točke je druga znamenka perioda, a to je 7. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

U 5 kg kupljene zemlje ima 88 % suhe tvari, odnosno $5 \cdot 0.88 = 4.4$ kg. 2 BODA

Masa suhe tvari ostat će ista i nakon nadolijevanja vode.

Neka je u 5 kg zemlje dodano x kg (litara) vode.

Tada vrijedi $4.4 = 0.72(5 + x)$. 2 BODA

$\Rightarrow x = \frac{0.8}{0.72} = \frac{80}{72} = \frac{10}{9} = 1.\dot{1}$ litara. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka je x masa vode (kg) koju treba uliti u zemlju.

Tada vrijedi: $5 \cdot 12 \% + x \cdot 100 \% = (5 + x) \cdot 28 \%$, 2 BODA

odnosno $5 \cdot 0.12 + x = 1.4 + 0.28x$. 2 BODA

$\Rightarrow x = \frac{0.8}{0.72} = \frac{80}{72} = \frac{10}{9} = 1.\dot{1}$ litara. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Trošak za fasadu je 1 200 000 kn. Bepovratni dio sredstava iznosi 60% što znači da stanari moraju podmiriti 40% troškova, što iznosi 480 000 kn. 1 BOD

Prosječna godišnja cijena grijanja bila je 168 000 kn, a s uštedom od 35% iznosit će 109 200 kn. 1 BOD

Označimo s n broj godina potrebnih da se investicija isplati. Onda je ukupna cijena za n godina grijanja prije stavljanja nove fasade $168\ 000\ n$, 1 BOD

a ukupna cijena za n godina grijanja nakon postavljanja fasade $109\ 200\ n$. 1 BOD

Treba odrediti najmanji broj godina za koji će trošak grijanja prije stavljanja nove fasade biti veći od zbroja ukupnih troškova grijanja poslije stavljanja fasade i troškova za fasadu koje plaćaju stanari. 1 BOD

Odredimo najmanji prirodni broj n za koji vrijedi:

$168\ 000\ n > 109\ 200\ n + 480\ 000$. 1 BOD

$168\ 000\ n - 109\ 200n > 480\ 000$

$58\ 800n > 480\ 000$ 1 BOD

$n > \frac{480\ 000}{58\ 800}$ 1 BOD

Kako je $\frac{480\,000}{58\,800} \approx 8.2$,

1 BOD

najmanji prirodni broj koji zadovoljava ovaj uvjet je 9, odnosno investicija će se isplatiti za 9 godina.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Budući da je $|OP| = 7$ cm, točka P može imati koordinate 7 ili -7 .

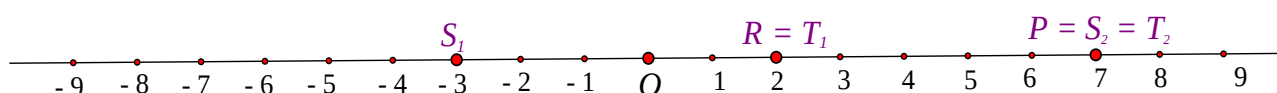
1 BOD

Slično, točka R može imati koordinate 2 ili -2 .

1 BOD

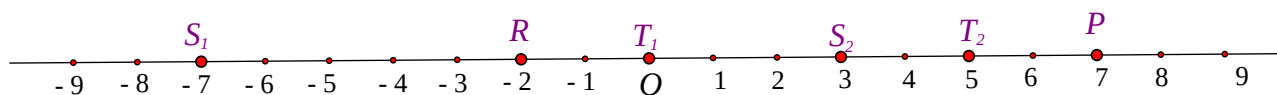
Razlikujemo 4 slučaja:

1. $P(7), R(2) \rightarrow S_1(-3)$ ili $S_2(7) \rightarrow T_1(2)$ ili $T_2(7)$



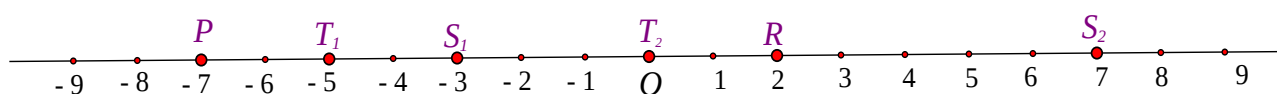
2 BODA

2. $P(7), R(-2) \rightarrow S_1(-7)$ ili $S_2(3) \rightarrow T_1(0)$ ili $T_2(5)$



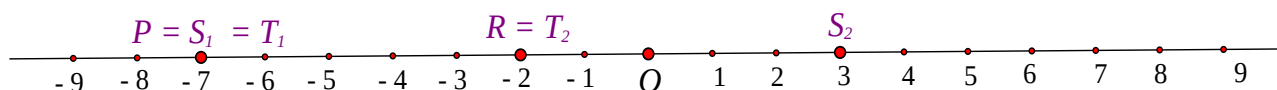
2 BODA

3. $P(-7), R(2) \rightarrow S_1(-3)$ ili $S_2(7) \rightarrow T_1(-5)$ ili $T_2(0)$



2 BODA

4. $P(-7), R(-2) \rightarrow S_1(-7)$ ili $S_2(3) \rightarrow T_1(-7)$ ili $T_2(-2)$



2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. siječnja 2019.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Budući da za duljine stranica trokuta vrijedi $a : b : c = 3 : 5 : 7$, onda postoji (realni) broj k takav da je $a = 3k$, $b = 5k$ i $c = 7k$.

Tada je $3k + 5k + 7k = 210$, iz čega je $k = 14$.

1 BOD

Stranice trokuta duge su 42 cm, 70 cm i 98 cm.

3 BODA

Trokut je pravokutan ako za duljine stranica trokuta vrijedi Pitagorin poučak.

Kako je $42^2 + 70^2 = 6664$, a $98^2 = 9604$, trokut nije pravokutan.

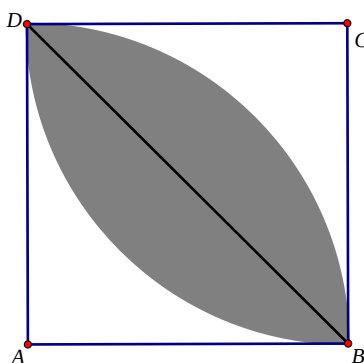
2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Učenik može pokazati općenitiju tvrdnju, tj. tvrdnju da niti jedan trokut čije su duljine stranica u omjeru $3 : 5 : 7$ nije pravokutan. Naime $9k^2 + 25k^2 = 34k^2 \neq 49k^2$, $k > 0$.

2. Prvi način:

„Lista“ se može prepoloviti dijagonalom kvadrata $\overline{BD}$.



Površina polovice „lista“ jednaka je razlici površine kružnog isječka, koji je zapravo četvrtina kruga sa središtem u točki A i polumjerom $\overline{AB}$ i površine jednakokračnog pravokutnog trokuta ABD .

1 BOD

Ako s a označimo duljinu stranice kvadrata, površina polovice „lista“ je $\frac{a^2\pi}{4} - \frac{a^2}{2}$.

2 BODA

Tada je površina cijelog „lista“ $\frac{a^2\pi}{2} - a^2 = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

1 BOD

Udio površine „lista“ u kvadratu jednak je omjeru površine lista i površine kvadrata:

$$\frac{a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{a^2} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 1.57 - 1 = 0.57 = 57\%$$

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Površina kvadrata je a^2 . Kvadrat se sastoji od zatamnjenog „lista“ (njegovu površinu označimo s P_1) i nezatamnjenih sukladnih likova ABD i BCD (njihovu površinu označimo s P_2).

Zbroj površina tih triju likova mora biti jednaka površini kvadrata tj. mora vrijediti

$$a^2 = P_1 + 2P_2. \quad (1) \quad 1 \text{ BOD}$$

S druge strane, „lista“ i nezatamnjeni lik ABD čine četvrtinu kruga površine $a^2 \cdot \frac{\pi}{4}$ pa mora biti

$$a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = P_1 + P_2. \quad (2) \quad 1 \text{ BOD}$$

Pomnožimo li (2) s 2 i od tako pomnožene druge jednadžbe oduzmemo prvu, dobivamo da je površina „lista“:

$$P_1 = \frac{a^2\pi}{2} - a^2. \quad 2 \text{ BODA}$$

Sada, istovjetno kao u prvom načinu rješavanja, zaključujemo kako je udio površine „lista“ u kvadratu približno jednak 57 %.

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

Označimo s e_1 i f_1 duljine dijagonala početnog romba, a s e_2 i f_2 duljine dijagonala romba dobivenog nakon produljenja dijagonala. Tada vrijedi:

$$e_1 = f_1 + 14,$$

$$e_2 = e_1 + 2 = f_1 + 14 + 2 = f_1 + 16 \text{ i}$$

$$f_2 = f_1 + 8. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Vrijedi } P_2 = P_1 + 144, \text{ odnosno } \frac{e_2 \cdot f_2}{2} = \frac{e_1 \cdot f_1}{2} + 144. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Dalje je } \frac{(f_1+16) \cdot (f_1+8)}{2} = \frac{(f_1+14) \cdot f_1}{2} + 144, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$(f_1+16) \cdot (f_1+8) = (f_1+14) \cdot f_1 + 288,$$

$$f_1^2 + 16f_1 + 8f_1 + 128 = f_1^2 + 14f_1 + 288, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$10f_1 = 160 \Rightarrow f_1 = 16.$$

$$\text{Tada je } e_1 = 16 + 14 = 30.$$

$$\text{Duljine dijagonala romba su } 30 \text{ cm i } 16 \text{ cm.} \quad 2 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka su e, f duljine dijagonale prvog romba.

$$\text{Vrijedi } e - f = 14.$$

$$\text{Površina prvog romba je } P_1 = \frac{ef}{2}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Duljine dijagonala drugog romba su $e + 2, f + 8$,

$$\text{a površina mu je } P_2 = \frac{(e+2)(f+8)}{2}. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Vrijedi } P_2 = P_1 + 144, \text{ pa možemo pisati } \frac{(e+2)(f+8)}{2} = \frac{ef}{2} + 144. \quad 1 \text{ BOD}$$

Dalje je

$$\frac{ef + 8e + 2f + 16}{2} = \frac{ef}{2} + 144,$$

$$\frac{ef}{2} + 4e + f + 8 = \frac{ef}{2} + 144 \Rightarrow 4e + f = 136. \quad 1 \text{ BOD}$$

Riješimo sustav jednadžbi:

$$e - f = 14$$

$$4e + f = 136$$

$$e = 30, f = 16$$

Duljine dijagonala romba su 30 cm i 16 cm.

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: U slučaju *sitne* računske pogreške prilikom rješavanja sustava jednažbi, umjesto 2 BODA, treba dati 1 BOD.

4. Označimo s x broj kilometara koje je Gospodin Perić prešao u petak.

Za taj put trebao bi platiti $[20 + 5x]$ kuna jer u petak nije bilo popusta.

1 BOD

U subotu je gospodin Perić prešao 5 km više, tj. $[x + 5]$ kilometara, što bi bez popusta platilo

$[20 + (5(x + 5))]$ kuna, tj. $[45 + 5x]$ kuna,

no uz 20 % popusta on plaća 80 % cijene, što znači da plaća $[0.8 (45 + 5x)]$ kuna, odnosno

$[36 + 4x]$ kuna.

1 BOD

S obzirom da je u subotu platilo isti iznos novca kao u petak, vrijedi jednažba

$$0.8 (45 + 5x) = 20 + 5x,$$

1 BOD

$$36 + 4x = 20 + 5x,$$

$$x = 16.$$

1 BOD

Dakle, gospodin Perić je u petak prešao 16 km, a u subotu 21 km.

1 BOD

Za jednu vožnju platilo je $20 + 16 \cdot 5 = 20 + 80 = 100$ kuna.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

Bacanje svakog od simetričnih novčića ima dva moguća ishoda „palo je pismo“ ili „pala je glava“.

Ukupan broj mogućih ishoda za bacanje četiri simetrična novčića jednak je $2^4 = 16$.

2 BODA

Dva pisma mogu pasti na dva od četiri simetrična novčića na $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ različitih načina, pri čemu

dvije glave padaju na preostala dva novčića.

2 BODA

Zato je tražena vjerojatnost $p = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\%$.

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Označimo sa P = „palo je pismo“, G = „pala je glava“ ishode bacanja simetričnog novčića.

Ispišimo sve ishode bacanja četiri simetrična novčića:

$\{PPPP, PPPG, PPGP, PGPP, GPPP, PPGG, PGGP, PGPG, GP GP, GPPG, GGPP, PGGG, GP GG, GGPG, GG GP, GGGG\}$

3 BODA

Povoljni ishodi su:

$\{PPGG, PGGP, PGPG, GP GP, GPPG, GGPP\}$

1 BOD

Tražena vjerojatnost je $p = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\%$.

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik računa vjerojatnost tako da ishode da je palo 0 pisama, 1 pismo, 2 pisma, 3 pisma i 4 pisma tretira jednako vjerojatnima te tako dobije da je vjerojatnost $\frac{1}{5}$, to treba ocijeniti s 0 BODOVA jer je potpuno pogrešno.

6. Prvi način:

$$(3a + 5b)^2 = 9a^2 + 30ab + 25b^2 \quad 2 \text{ BODA}$$

$$= 9(a - b)^2 + 48ab + 16b^2 = 9(a - b)^2 + 16(3ab + b^2) \quad 4 \text{ BODA}$$

Kako je $a - b$ djeljivo s 4, to je $(a - b)^2$ djeljivo sa 16,

pa je i $9(a - b)^2 + 16(3ab + b^2)$ djeljivo sa 16, jer je $3ab + b^2$ cijeli broj. 4 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik, u pokušaju dokazivanja, napiše rastav $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ i ne uspije to iskoristiti, svejedno treba, za taj rastav, dobiti 1 BOD.

Drugi način:

Iz uvjeta da su a i b cijeli brojevi takvi da je $a - b$ djeljivo s 4, slijedi da a i b imaju iste ostatke pri dijeljenju s 4, tj. da je $a = 4k + i$, $b = 4l + i$, za cijele brojeve k i l te $i = 0, 1, 2, 3$. 3 BODA

$$\text{Tada je } (3a + 5b)^2 = (3(4k + i) + 5(4l + i))^2 = (4(3k + 5l) + 8i)^2 \quad 4 \text{ BODA}$$

$$= 16(3k + 5l + 2i)^2 \text{ što je djeljivo sa 16, jer je } (3k + 5l + 2i)^2 \text{ cijeli broj.} \quad 3 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Ako je $a - b$ djeljivo sa 4, onda postoji cijeli broj k takav da je $a - b = 4k$.

$$\text{Tada je } a = b + 4k. \quad 2 \text{ BODA}$$

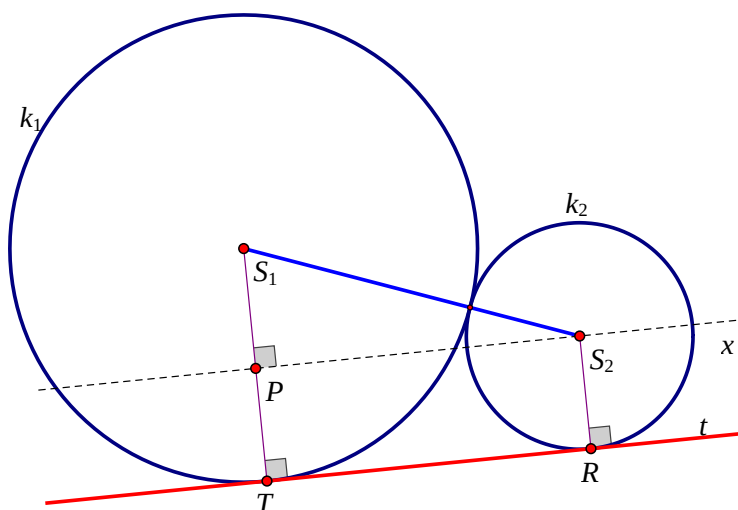
$$\text{Onda je } 3a + 5b = 3(b + 4k) + 5b = 8b + 12k. \quad 2 \text{ BODA}$$

$$\text{Tada je } (3a + 5b)^2 = (8b + 12k)^2 = 64b^2 + 192bk + 144k^2. \quad 3 \text{ BODA}$$

$$\text{To se može napisati kao } 16 \cdot (4b^2 + 12bk + 9k^2), \text{ pa je djeljivo sa 16.} \quad 3 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:



Skica: 1 BOD

Označimo sa S_1 i S_2 središta kružnica k_1 i k_2 redom, kao i njihove polumjere r_1 i r_2 . Neka je $r_1 > r_2$.

Zadatak se slično rješava i u slučaju $r_2 > r_1$. Točkom S_2 nacrtamo paralelu x s $\overline{TR}$. Neka je P sjecište pravca x i polumjera $\overline{S_1T}$ kružnice k_1 .

Tada je trokut S_1S_2P pravokutan, 1 BOD

a četverokut S_2PTR pravokutnik, pri čemu je $|S_2P| = |TR|$. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka dobivamo $|TR| = |PS_2| = \sqrt{|S_1S_2|^2 - |S_1P|^2}$. (*) 2 BODA

Iskoristimo omjer (2 : 1) između polumjera kružnica k_1 i k_2 kao i pretpostavku da je $r_1 > r_2$. Naime, postoji broj r tako da možemo pisati; $r_1 = 2r$, $r_2 = r$.

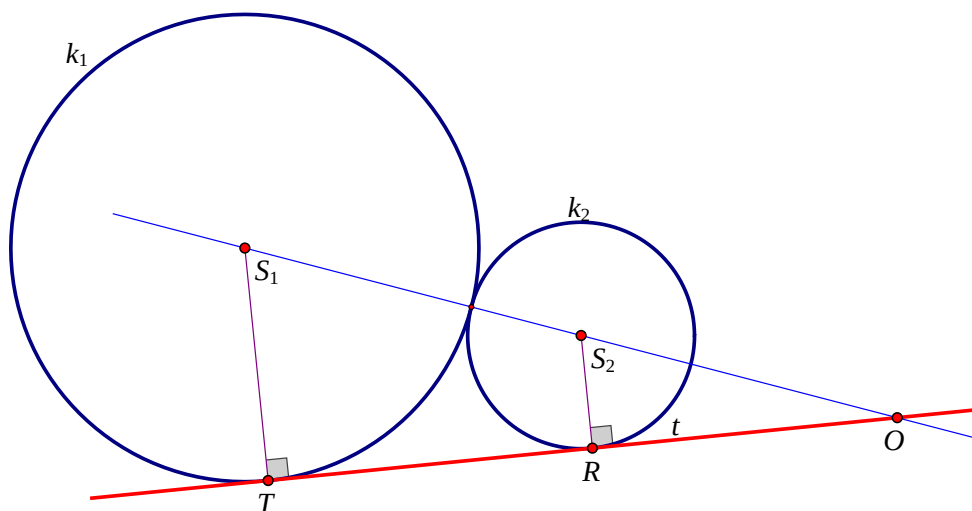
Tada je $|S_1S_2| = 3r$. 1 BOD

Uvrštavanjem u (*) dobivamo $|TR| = \sqrt{9r^2 - r^2} = \sqrt{8r^2} = 2\sqrt{2}r$. 3 BODA

pa je traženi omjer $|TR| : |S_1T| = 2\sqrt{2}r : 2r = \sqrt{2} : 1$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



Skica: 1 BOD

Označimo sa S_1 i S_2 središta kružnica k_1 i k_2 redom, kao i njihove polumjere r_1 i r_2 . Neka je $r_1 > r_2$. Zadatak se slično rješava i u slučaju $r_2 > r_1$.

Iz uvjeta da je $r_1 : r_2 = 2 : 1$ slijedi da postoji broj r takav da je $r_1 = 2r$, $r_2 = r$.

Središtima S_1 i S_2 nacrtajmo pravac S_1S_2 .

Neka je točka O sjecište tangente TR i pravca S_1S_2 . Prema K-K poučku o sličnosti trokuta

ROS_2 i TOS_1 su slični (imaju jedan zajednički kut $\angle TOS_1 = \angle ROS_2$ i jedan pravi kut). 2 BODA

Zbog $|S_1T| = 2|S_2R|$ vrijedi $|S_1O| = 2|S_2O|$, odnosno $|S_2O| = |S_1S_2| = 3r$. 2 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut ROS_2 dobije se:

$$|RO|^2 = |OS_2|^2 - |S_2R|^2 = 9r^2 - r^2 = 8r^2. \quad 3 \text{ BODA}$$

Tada je $|TR| = |RO| = \sqrt{8r^2} = 2\sqrt{2}r$. 1 BOD

Onda je $|TR| : |S_1T| = 2\sqrt{2}r : 2r = \sqrt{2} : 1$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA