

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

5. razred – osnovna škola

14. ožujka 2025.

Ako učenik ima drugačiji postupak rješavanja zadatka, Povjerenstvo je dužno i taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak OŠ-5.1.

Tena je zamislila tri prirodna broja. Odredi sva tri broja ako je poznato sljedeće:

- prvi je broj najmanji parni četveroznamenasti broj s različitim znamenkama;
- drugi je broj najveći četveroznamenasti broj s različitim neparnim znamenkama koji nije djeljiv s tri;
- treći je broj jednak zbroju tri četvrtine prvoga i četiri sedmine drugoga broja.

Rješenje.

Kako bi prvi broj bio najmanji četveroznamenasti broj s različitim znamenkama, znamenke tisućica, stotica i desetica su, redom, 1, 0 i 2. 2 boda

Znamenka jedinica mora biti 4 kako bi traženi broj bio paran pa je prvi broj 1024. 1 bod

Zatim, kako bi drugi broj bio najveći četveroznamenasti broj s različitim neparnim znamenkama, znamenke tisućica, stotica i desetica su, redom, 9, 7 i 5. 2 boda

Kako je $9 + 7 + 5 = 21$, znamenka jedinica ne smije biti 3 jer drugi broj nije djeljiv s 3 pa mora biti 1. Dakle, drugi broj je 9751. 2 boda

Odredimo još treći broj. Četvrtina prvog broja je $1024 : 4 = 256$ pa tri četvrtine prvog broja iznose $256 \cdot 3 = 768$. 1 bod

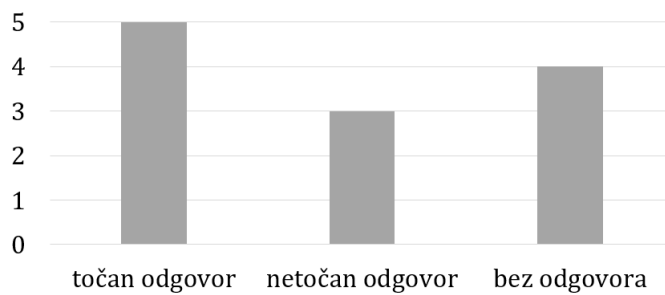
Sedmina drugog broja iznosi $9751 : 7 = 1393$ pa četiri sedmine drugog broja iznose $1393 \cdot 4 = 5572$. 1 bod

Konačno, treći broj je $768 + 5572 = 6340$. 1 bod

Napomena: Ako su pogrešno određeni prvi ili drugi broj, pri određivanju trećeg broja učniku se, od predviđena 3 boda, dodjeljuju najviše 2 boda na sljedeći način: 1 bod za određivanje tri četvrtine prvog broja ako je prvi broj djeljiv s 4, te 1 bod za određivanje četiri sedmine drugog broja ako je drugi broj djeljiv sa 7.

Zadatak OŠ-5.2.

Astra i Gea rješavale su ispit iz astronomije. Za svaki zadatak s točnim odgovorom daje se isti broj bodova. Za svaki zadatak bez odgovora oduzima se isti broj bodova. Za svaki zadatak s netočnim odgovorom oduzima se dvostruko više bodova nego za zadatak bez odgovora. Gea je u svim zadacima dala točne odgovore i postigla 120 bodova. Astra je postigla ukupno 20 bodova te je dijagramom prikazano koliko je imala točnih i netočnih odgovora te na koliko zadataka nije dala odgovor. Koliko se bodova oduzima za svaki zadatak bez odgovora?



Prvo rješenje.

Na ispitu iz astronomije bilo je ukupno $5 + 3 + 4 = 12$ zadataka.

1 bod

Za svaki se zadatak s točnim odgovorom daje $120 : 12 = 10$ bodova.

1 bod

Astra je imala 5 točnih odgovora, pa je za njih dobila $5 \cdot 10 = 50$ bodova.

1 bod

Kako je postigla ukupno 20 bodova, $50 - 20 = 30$ je bodova izgubila na netočne odgovore i zadatke bez odgovora.

1 bod

Kako je na tri zadatka dala netočan odgovor i na još četiri nije odgovorila, za svaki netočan odgovor oduzima se manje od 10 bodova. Broj bodova koji se oduzimaju za netočan odgovor mora biti paran; 2, 4, 6 ili 8 bodova.

2 boda

U tim slučajevima bi se za zadatak bez odgovora oduzimalo, redom, 1, 2, 3 ili 4 boda.

1 bod

bodovi koji se oduzimaju za netočan odgovor	2	4	6	8
bodovi koji se oduzimaju za zadatak bez odgovora	1	2	3	4
ukupno se oduzima Astri za netočne odgovore	6	12	18	24
ukupno se oduzima Astri za zadatke bez odgovora	4	8	12	16
ukupno se oduzima Astri	10	20	30	40
	nemoguće	nemoguće	moгуće	nemoguće

3 boda

Za svaki zadatak bez odgovora oduzimaju se 3 boda.

Napomena: Za navedena tri nemoguća slučaja dodjeljuju se **2 boda** (1 bod za dva, 2 boda za sva tri slučaja), a **1 bod** se dodjeljuje za mogući slučaj, odnosno rješenje zadatka.

Drugo rješenje.

Na ispitu iz astronomije bilo je ukupno $5 + 3 + 4 = 12$ zadataka. 1 bod

Za svaki se točan odgovor daje $120 : 12 = 10$ bodova. 1 bod

Astra je imala 5 točnih odgovora, pa je za njih dobila $5 \cdot 10 = 50$ bodova. 1 bod

Neka je N broj bodova koji se oduzimaju za netočan odgovor, a X broj bodova koji se oduzimaju za zadatak bez odgovora.

Astra je postigla 20 bodova, pa je broj bodova koje je izgubila za netočne odgovore ili zadatke bez odgovora 30. 1 bod

Odnosno

$$3 \cdot N + 4 \cdot X = 30, \quad 2 \text{ boda}$$

te $N = 2 \cdot X$. 1 bod

Stoga,

$$6X + 4X = 30 \quad 1 \text{ bod}$$

$$10X = 30 \quad 1 \text{ bod}$$

$$X = 3. \quad 1 \text{ bod}$$

Za svaki zadatak bez odgovora oduzimaju se 3 boda.

Zadatak OŠ-5.3.

Koliko ima prirodnih brojeva oblika $\overline{2025abc}$ koji su djeljivi s 9, a čiji su ostaci pri dijeljenju brojem 2 i brojem 5 međusobno jednaki?

Prvo rješenje.

Ostatak pri dijeljenju s 2 može biti 1 ili 0, a ostatak pri dijeljenju s 5 može biti 0, 1, 2, 3 ili 4. Ako ostaci moraju biti međusobno jednaki, tada su to ostaci 0 i 1. 2 boda

I.slučaj

Ako je ostatak pri dijeljenju s 2 i s 5 jednak 0, zaključujemo da je broj djeljiv s 10 i posljednja znamenka traženog broja je $c = 0$.

Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9, pa je $2 + 0 + 2 + 5 + a + b + 0 = 9 + a + b$, $9 + a + b \in \{9, 18, 27\}$, tj. $a + b \in \{0, 9, 18\}$. 1 bod

Ako je $a + b = 0$, tada je $a = b = 0$. Takav je **jedan broj**.

Ako je $a + b = 18$, tada je $a = b = 9$. Takav je **jedan broj**. 1 bod

Ako je $a + b = 9$, tada je $b = 9 - a$. S obzirom da a može biti bilo koja od 10 znamenaka, takvih je **deset brojeva**. 1 bod

II.slučaj

Ako je ostatak pri dijeljenju s 2 jednak 1, znamenka c je neparna, tj. $c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Ako je ostatak pri dijeljenju s 5 jednak 1, vrijedi $c \in \{1, 6\}$.

Zaključujemo da vrijedi $c = 1$. 1 bod

Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9, pa je $2+0+2+5+a+b+1 = 10+a+b$, $10+a+b \in \{18, 27\}$, tj. $a+b \in \{8, 17\}$. 1 bod

Ako je $a+b=8$, tada je $b=8-a$ pa a može biti bilo koja znamenka osim 9. Takvih je **devet brojeva**. 1 bod

Ako je $a+b=17$, takva su **dva broja** jer je $a=8$ i $b=9$ ili $a=9$ i $b=8$. 1 bod

Ukupno, traženih brojeva oblika $\overline{2025abc}$ ima 23. 1 bod

Drugo rješenje.

Promatramo brojeve oblika $\overline{2025abc}$ koji su višekratnici broja 9 te provjeravamo zadovoljavaju li uvjete zadatka, odnosno jesu li im ostatci pri dijeljenju brojem 2 i brojem 5 međusobno jednaki. Najmanji broj koji promatramo je 2025000, najveći 2025999, a među njima je 112 višekratnika broja 9 (to su brojevi oblika $2025000+9n$ za $n \in \{0, 1, \dots, 111\}$). 2 boda

	broj	ostatak pri dijeljenju s 2	ostatak pri dijeljenju s 5	uvjeti zadovoljeni
1	2025000	0	0	da
2	2025009	1	4	ne
3	2025018	0	3	ne
4	2025027	1	2	ne
5	2025036	0	1	ne
6	2025045	1	0	ne
7	2025054	0	4	ne
8	2025063	1	3	ne
9	2025072	0	2	ne
10	2025081	1	1	da
11	2025090	0	0	da
12	2025099	1	4	ne
13	2025108	0	3	ne
14	2025117	1	2	ne
15	2025126	0	1	ne
16	2025135	1	0	ne
17	2025144	0	4	ne
18	2025153	1	3	ne
19	2025162	0	2	ne
20	2025171	1	1	da
21	2025180	0	0	da
22	2025189	1	4	ne
...	...	...	...	...
109	2025972	0	2	ne
110	2025981	1	1	da
111	2025990	0	0	da
112	2025999	1	4	ne

3 boda

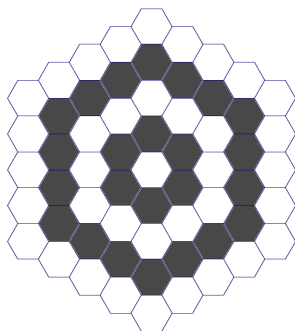
Uvjete zadovoljavaju 1., 10. i 11., 20. i 21., ... te 110. i 111. broj u tom nizu. 2 boda

Nakon prvog broja imamo ukupno 11 parova, odnosno 22 broja. 2 boda

Ukupno, traženih brojeva oblika $\overline{2025abc}$ ima 23. 1 bod

Zadatak OŠ-5.4.

Na gradskom trgu postavljen je mozaik od jednakih pločica oblika pravilnog šesterokuta. U prvom je koraku na središtu trga postavljena jedna bijela pločica. U drugom su koraku oko nje postavljene crne pločice, njih šest. U trećem su koraku oko njih postavljene bijele pločice, itd. U svakom su sljedećem koraku oko prethodno postavljenih pločica postavljene pločice druge boje, naizmjenice bijele i crne boje. Slika prikazuje izgled mozaika nakon pet koraka.



Postupak je nastavljen na opisani način dok nije provedeno ukupno 2025 koraka. Time je mozaik dovršen. Za koliko je broj bijelih pločica u gotovom mozaiku veći od broja crnih pločica?

Prvo rješenje.

U prvom je koraku jedna bijela pločica, u trećem je dodano $12 = 2 \cdot 6$, a u petom $24 = 4 \cdot 6$ bijele pločice.

1 bod

Broj bijelih pločica u 2025. koraku je

$$1 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + \dots + 2024 \cdot 6.$$

2 boda

U drugom je koraku oko prve bijele dodano $6 = 1 \cdot 6$, a u četvrtom $18 = 3 \cdot 6$ crnih pločica.

1 bod

Broj crnih pločica u 2025. koraku je

$$1 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 6 + \dots + 2023 \cdot 6.$$

2 boda

Razlika broja bijelih i broja crnih pločica je:

$$1 + (2 - 1) \cdot 6 + (4 - 3) \cdot 6 + (6 - 5) \cdot 6 + \dots + (2024 - 2023) \cdot 6 =$$

2 boda

$$= 1 + 1012 \cdot 6 = 6073.$$

2 boda

Napomena:

Učenik može izračunati ukupan broj bijelih pločica (6150937),

4 boda

broj crnih pločica (6144864),

4 boda

a zatim odrediti njihovu razliku (6073).

2 boda

Drugo rješenje.

U drugom koraku dodano je 6 crnih, u trećem 12 bijelih, u četvrtom 18 crnih, a u petom 24 bijelih pločica.

2 boda

U svakom koraku, nakon drugog, broj dodanih pločica je za 6 veći od broja dodanih pločica u prethodnom koraku. Stoga je razlika broja zadnje dodanih bijelih i prethodno dodanih crnih pločica uvijek 6.

2 boda

Crne i bijele pločice, nakon prvog koraka, dodavane su naizmjenice 2024 puta (1012 puta bijele, a 1012 puta crne),

2 boda

što znači da je broj bijelih za $1012 \cdot 6 = 6072$ veći od broja crnih pločica.

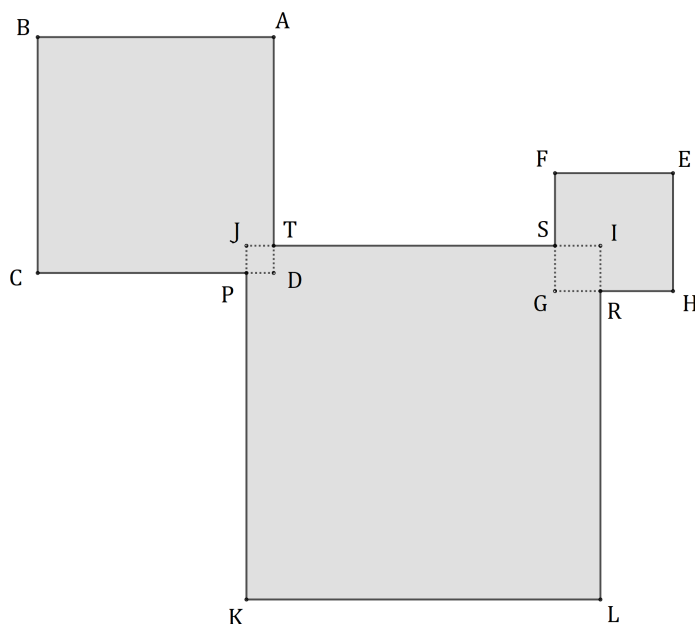
2 boda

Nakon dodavanja jedne bijele pločice iz prvog koraka u gotovom mozaiku ukupan broj bijelih pločica veći je od ukupnog broja crnih pločica za $6072 + 1 = 6073$.

2 boda

Zadatak OŠ-5.5.

Na veliki papir zalijepljeni su kvadrati $ABCD$, $EFGH$ i $IJKL$ kao što je prikazano na slici. Stranica kvadrata $ABCD$ dva je puta dulja od stranice kvadrata $EFGH$. Stranica kvadrata $IJKL$ tri je puta dulja od stranice kvadrata $EFGH$. Točke u kojima se sijeku rubovi kvadrata točke su P , R , S i T . Presjek kvadrata $ABCD$ i $IJKL$ kvadrat je $TJPD$ površine 9. Presjek kvadrata $IJKL$ i $EFGH$ kvadrat je $ISGR$ površine 25. Ako je opseg lika $ABCPKLRHEFST$ jednak 280, odredi površinu toga lika.

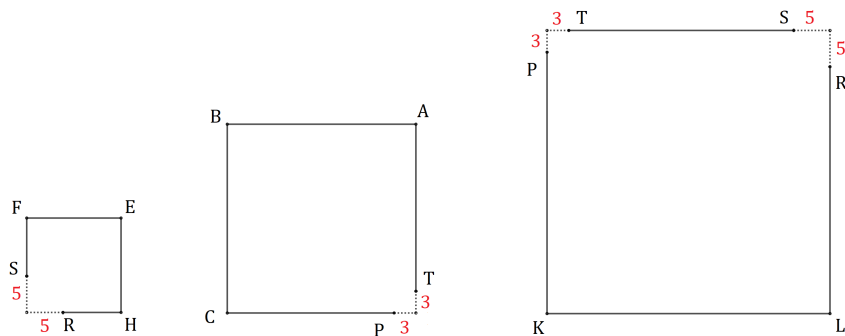


Prvo rješenje.

Kvadrat kojemu je površina 9 ima stranicu duljine 3, a kvadrat kojemu je površina 25 ima stranicu duljine 5.

1 bod

Rub lika $ABCPKLRHEFST$ sastoji se od tri dijela, kao što je prikazano na donjoj slici.



Neka je x duljina stranice kvadrata $EFGH$. Tada su duljine stranica kvadrata $ABCD$ i $IJKL$, redom, $2x$ i $3x$.

Opseg lika $ABCPKLRHEFST$ jednak je zbroju:

- opsega kvadrata $EFGH$ umanjenog za duljine dviju stranica kvadrata čija je površina 25, odnosno $4x - 10$,
- opsega kvadrata $ABCD$ umanjenog za duljine dviju stranica kvadrata čija je površina 9, odnosno $4 \cdot 2x - 6 = 8x - 6$,
- opsega kvadrata $IJKL$ umanjenog za duljine dviju stranica kvadrata čija je površina 9 i duljine dviju stranica kvadrata čija je površina 25, odnosno $4 \cdot 3x - 16 = 12x - 16$,

1 bod

1 bod

2 boda

tj. opsega sva tri kvadrata umanjenog za 32

$$4x - 10 + 8x - 6 + 12x - 16 = 280$$

$$24x - 32 = 280$$

$$24x = 312$$

$$x = 13.$$

2 boda

Površina lika $ABCPKLRHEFST$ jednaka je zbroju površina kvadrata $EFGH$, $ABCD$ i $IJKL$ umanjenom za $9 + 25 = 34$,

1 bod

$$P = 13 \cdot 13 + 26 \cdot 26 + 39 \cdot 39 - 34 = 169 + 676 + 1521 - 34 = 2332.$$

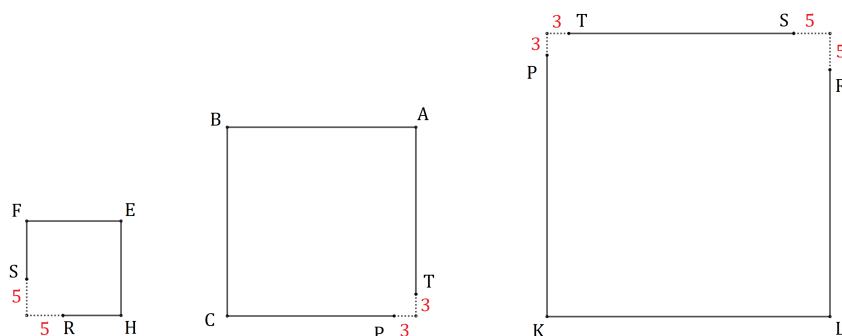
2 boda

Drugo rješenje.

Kako je presjek kvadrata $EFGH$ i $IJKL$ kvadrat čija je površina 25, odnosno čija je stranica duljine 5, zaključujemo da duljina stranica kvadrata $EFGH$ mora biti veća od 5.

1 bod

Rub lika $ABCPKLRHEFST$ sastoji se od tri dijela, kao što je prikazano na donjoj slici.



Kako je $5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 5 = 32$, opseg lika $ABCPKLRHEFST$ jednak je zbroju opsega sva tri kvadrata umanjenom za 32.

2 boda

Do rješenja se može doći promatranjem opsega kvadrata i opsega traženog lika.

duljina stranice kvadrata			opseg kvadrata			opseg lika $ABCPKLRHEFST$	
$EFGH$	$ABCD$	$IJKL$	$EFGH$	$ABCD$	$IJKL$		
6	12	18	24	48	72	112	premalo
7	14	21	28	56	84	136	premalo
...	...	...	...	...	...	...	...
12	24	36	48	96	144	256	premalo
13	26	39	52	104	156	280	✓
14	28	42	56	112	168	304	previše
15	30	45	60	120	180	328	previše
...	...	...	...	...	...	...	...

4 boda

Zaključujemo da je duljina stranice kvadrata $EFGH$ jednaka 13.

1 bod

Površina lika $ABCPKLRHEFST$ jednaka je zbroju površina kvadrata $EFGH$, $ABCD$ i $IJKL$ umanjenom za $9 + 25 = 34$, odnosno

$$P = 13 \cdot 13 + 26 \cdot 26 + 39 \cdot 39 - 34 = 169 + 676 + 1521 - 34 = 2332.$$

2 boda

Napomena: Kako bi učeniku bila dodijeljena **4 boda** za tablicu potrebno je pokazati da je rješenje jedinstveno tj. obrazložiti kako nema drugih rješenja. Jedinstvenost rješenja može se argumentirati uočavanjem rasta (pada) opsega s obzirom na rast (pad) duljina stranica kvadrata. Učenik može i ispisivati slučajeve kada je stranica prvog kvadrata manja (veća) od 13, te na taj način argumentirati smanjenje (povećanje) opsega.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

6. razred – osnovna škola

14. ožujka 2025.

Ako učenik ima drugačiji postupak rješavanja zadatka, Povjerenstvo je dužno i taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak OŠ-6.1.

Marko je s balkona pustio loptu da pada prema ravnome tlu. Nakon svakoga odbijanja od tla lopta odskoči i dosegne $\frac{2}{5}$ prethodne visine. Ako je u trećemu odskoku dostigla visinu od 80 cm, odredi u metrima duljinu ukupnoga puta koji će lopta prijeći od trenutka kad ju je Marko ispustio do trenutka kad peti put dodirne tlo.

Prvo rješenje.

Lopta je u trećem odskoku dosegla visinu od 80 cm što je $\frac{2}{5}$ visine s koje je pala.

$$80 : \frac{2}{5} = 200 \quad \text{ili} \quad \begin{array}{l} \frac{2}{5} \text{ je } 80 \\ \frac{1}{5} \text{ je } 40 \\ \frac{5}{5} \text{ je } 200 \end{array}$$

U trećem je padu pala s visine od 200 cm.

2 boda

U drugom je odskoku dosegla visinu od 200 cm što je $\frac{2}{5}$ visine s koje je pala.

$$200 : \frac{2}{5} = 500 \quad \text{ili} \quad \begin{array}{l} \frac{2}{5} \text{ je } 200 \\ \frac{1}{5} \text{ je } 100 \\ \frac{5}{5} \text{ je } 500 \end{array}$$

U drugom je padu pala s visine od 500 cm.

2 boda

U prvom je odskoku dosegla visinu od 500 cm što je $\frac{2}{5}$ visine s koje je pala.

$$500 : \frac{2}{5} = 1250 \quad \text{ili} \quad \begin{array}{l} \frac{2}{5} \text{ je } 500 \\ \frac{1}{5} \text{ je } 250 \\ \frac{5}{5} \text{ je } 1250 \end{array}$$

Lopta je na početku pala s visine od 1250 cm.	2 boda
U četvrtom je padu pala s visine od 80 cm.	
U četvrtom je odskoku dosegla visinu od $\frac{2}{5}$ od 80 = 32 cm što odgovara i duljini pada kada peti put dodirne tlo.	1 bod
Ukupna duljina puta iznosi $1250 + 2 \cdot 500 + 2 \cdot 200 + 2 \cdot 80 + 2 \cdot 32$,	1 bod
tj. 2874 cm.	1 bod
U metrima duljina puta iznosi 28.74 m.	1 bod

Drugo rješenje.

Neka je x visina s koje je Marko ispustio loptu.

U prvom odskoku lopta je dosegla visinu $\frac{2}{5}$ od x odnosno $\frac{2}{5}x$.	1 bod
---	-------

U drugom odskoku je dosegla visinu $\frac{2}{5}$ od $\frac{2}{5}x$ odnosno $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}x = \frac{4}{25}x$.	1 bod
---	-------

U trećem odskoku je dosegla visinu $\frac{2}{5}$ od $\frac{4}{25}x$ odnosno $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{25}x = \frac{8}{125}x$.	1 bod
--	-------

Uvrštavanjem dobijemo jednadžbu $\frac{8}{125}x = 80$, čije je rješenje $x = 1250$.

Marko je ispustio loptu s visine od 1250 cm.	1 bod
--	-------

U prvom je odskoku dosegla visinu od $\frac{2}{5} \cdot 1250 = 500$ cm što odgovara i duljini pada kada drugi put dodirne tlo.	1 bod
--	-------

U drugom je odskoku dosegla visinu od $\frac{2}{5} \cdot 500 = 200$ cm što odgovara i duljini pada kada treći put dodirne tlo.	1 bod
--	-------

U trećem odskoku lopta je dosegla visinu od 80 cm (kako je zadano zadatkom) pa je u četvrtom odskoku dostigla visinu od $\frac{2}{5}$ od 80 = 32 cm što odgovara i duljini pada kada peti put dodirne tlo.	1 bod
--	-------

Ukupna duljina puta iznosi $1250 + 2 \cdot 500 + 2 \cdot 200 + 2 \cdot 80 + 2 \cdot 32$,	1 bod
---	-------

tj. 2874 cm.	1 bod
--------------	-------

U metrima duljina puta iznosi 28.74 m.	1 bod
--	-------

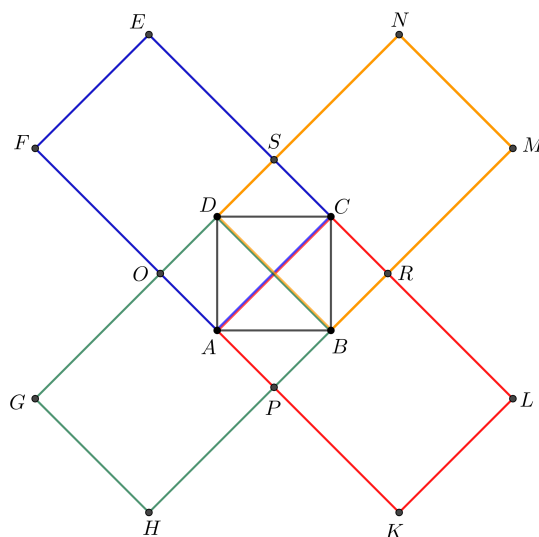
Zadatak OŠ-6.2.

Neka je $ABCD$ kvadrat duljine dijagonale 10 cm. Pravokutnici $ACEF$, $AKLC$, $BDGH$ i $BMND$ sukladni su i dulja stranica im je za 60 % dulja od stranice duljine 10 cm. Unija tih četiriju pravokutnika lik je u obliku križa. Odredi opseg i površinu toga lika.

Rješenje.

Skica

2 boda



Vrijedi $|AC| = |KL| = |FE| = |BD| = |GH| = |MN| = 10$ cm.

Dulja stranica pravokutnika iznosi $1.6 \cdot 10 = 16$ cm.

1 bod

Opseg – prvi način:

$|AK| = |CL| = |AF| = |CE| = |BH| = |DG| = |BM| = |DN| = 16$ cm.

$|AP| = 5$ cm i $|AK| = 16$ cm pa je $|PK| = 16 - 5 = 11$ cm.

1 bod

$|PK| = |RL| = |OF| = |SE| = |PH| = |OG| = |RM| = |SN| = 11$ cm.

Opseg lika iznosi $8 \cdot 11 + 4 \cdot 10 = 128$ cm.

2 boda

Opseg – drugi način:

Pravokutnici na slici su sukladni, a opseg svakog od njih je $2 \cdot 10 + 2 \cdot 16 = 52$ cm.

Zbroj opsega tih četiriju pravokutnika je $4 \cdot 52 = 208$ cm.

1 bod

Da bismo dobili opseg lika koji je unija ta četiri pravokutnika moramo oduzeti četiri duljine dijagonale kvadrata $ABCD$ i opseg kvadrata $OPRS$.

Opseg lika iznosi $208 - 4 \cdot 10 - 4 \cdot 10 = 128$ cm.

2 boda

Površina – prvi način:

Površinu lika možemo izračunati zbrajanjem površine kvadrata $OPRS$ i četiri sukladna pravokutnika $PKLR$, $RMNS$, $SEFO$ i $OGHP$.

Površina kvadrata iznosi $10 \cdot 10 = 100$ cm².

1 bod

Površina pravokutnika iznosi $11 \cdot 10 = 110$ cm².

1 bod

Površina lika iznosi $100 + 4 \cdot 110 = 540$ cm².

2 boda

Površina – drugi način:

Površinu lika možemo izračunati zbrajanjem površina četiri sukladna pravokutnika $AKLC$, $BMND$, $CEFA$ i $DGHB$ od čega oduzmemo površinu kvadrata $OPRS$.

Površina kvadrata iznosi $10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$.

1 bod

Površina pravokutnika iznosi $16 \cdot 10 = 160 \text{ cm}^2$.

1 bod

Površina lika iznosi $4 \cdot 160 - 100 = 540 \text{ cm}^2$.

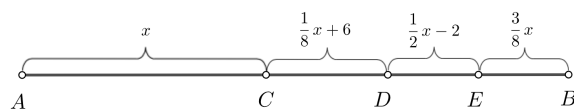
2 boda

Napomena: Ako učenik izračuna točan opseg i površinu lika na način koji nije prikazan u rješenju, ali uz objašnjenje postupka, za svaki od točnih izračuna dobiva **3 boda** za opseg, odnosno **4 boda** za površinu. Bez objašnjenja postupka, točan iznos opsega i površine nose po **1 bod**.

Zadatak OŠ-6.3.

Na dužini $\overline{AB}$, počevši od točke A , odabrane su redom točke C , D i E tako da je dužina $\overline{CD}$ za 6 cm dulja od $\frac{1}{8}$ dužine $\overline{AC}$, dužina $\overline{DE}$ za 2 cm kraća je od $\frac{1}{2}$ dužine $\overline{AC}$, a duljina dužine $\overline{EB}$ jest $\frac{3}{8}$ duljine dužine $\overline{AC}$. Kolika je duljina dužine $\overline{AB}$ ako je udaljenost polovišta dužina $\overline{CD}$ i $\overline{EB}$ jednaka 13 cm?

Rješenje.



Neka je $x = |AC|$.

Slijedi da je

$$|CD| = \frac{1}{8}x + 6$$

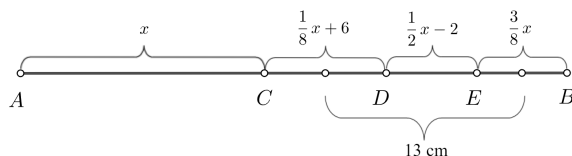
1 bod

$$|DE| = \frac{1}{2}x - 2$$

1 bod

$$|EB| = \frac{3}{8}x$$

1 bod



Udaljenost polovišta dužina $\overline{CD}$ i $\overline{EB}$ iznosi $\frac{1}{2} \cdot |CD| + |DE| + \frac{1}{2} \cdot |EB|$.

Budući da vrijedi $\frac{1}{2} \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}x + 6 \right) = \frac{1}{16}x + 3$,

1 bod

$$\text{te } \frac{1}{2} \cdot |EB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}x = \frac{3}{16}x \quad 1 \text{ bod}$$

nepoznanicu x računamo iz jednadžbe $\frac{1}{16}x + 3 + \frac{1}{2}x - 2 + \frac{3}{16}x = 13$.

Dobivamo $x = 16$. 2 boda

$$\text{Slijedi } |CD| = \frac{1}{8}x + 6 = 2 + 6 = 8, |DE| = \frac{1}{2}x - 2 = 8 - 2 = 6, |EB| = \frac{3}{8}x = 6. \quad 2 \text{ boda}$$

Duljina dužine $\overline{AB}$ iznosi $16 + 8 + 6 + 6 = 36$ cm. 1 bod

Zadatak OŠ-6.4.

Ana ima četiri kuglice različitih boja: plavu, crvenu, zelenu i žutu. Treba ih rasporediti u kutije označene brojevima od 1 do 5 tako da su u jednoj kutiji najviše dvije kuglice. Na koliko načina Ana može rasporediti kuglice u kutije?

Rješenje.

Imamo 3 slučaja: svaka kuglica je u svojoj kutiji, dvije kuglice su u jednoj kutiji i preostale dvije su svaka u svojoj kutiji, te po dvije kuglice su zajedno u kutiji. 1 bod

1. slučaj: svaka kuglica je u svojoj kutiji.

Prvu kuglicu može smjestiti u bilo koju od pet kutija, drugu kuglicu u bilo koju od preostale četiri kutije itd. Tada je broj mogućih rasporeda $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$. 2 boda

2. slučaj: dvije kuglice su u jednoj kutiji, a preostale dvije su svaka u svojoj kutiji.

Prvu kuglicu za prvu kutiju možemo izabrati na 4 načina, drugu na 3 načina. To je $4 \cdot 3 = 12$ načina. Nije nam važan poredak pa još moramo podijeliti s 2. Dvije kuglice koje će biti zajedno u istoj kutiji možemo izabrati na $4 \cdot 3 : 2 = 6$ načina. 1 bod

Za svaki od tih odabira moramo još odabrati 3 kutije (za te dvije kuglice i preostale dvije kuglice), a to ćemo učiniti na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ načina. 1 bod

Ukupan broj rasporeda u navedenom slučaju je $6 \cdot 60 = 360$. 1 bod

3. slučaj: po dvije kuglice su zajedno u kutiji.

Primijetimo da je dovoljno odrediti broj načina da za jednu kuglicu odaberemo s kojom će kuglicom biti u kutiji jer je tada i preostali par određen. Pri tom nam nije bitan poredak, tj. koji je par prvi, a koji drugi. Npr. za plavu kuglicu može se odabrati na tri načina s kojom će kuglicom biti u kutiji, dakle, postoje 3 načina za odabir dva para kuglica. 1 bod

Za svaki od tih odabira dvije kutije u kojima će biti kuglice možemo odabrati na $5 \cdot 4 = 20$ načina. 1 bod

Dakle, ukupan broj rasporeda u ovom slučaju je $3 \cdot 20 = 60$. 1 bod

Konačno, broj svih mogućih rasporeda iznosi $120 + 360 + 60 = 540$. 1 bod

Napomena: Za prvi bod nije nužno da sva tri slučaja budu navedena u istoj rečenici, već je dovoljno da učenik razmatra navedena tri slučaja.

Napomena: U svakom od tri slučaja možemo prvo prebrojiti broj načina da rasporedimo kuglice koje ne razlikujemo, a nakon toga pridružimo boje kuglicama. Redom po slučajevima zapisujemo te brojeve kao umnoške: $5 \cdot 24$, $30 \cdot 12$, $10 \cdot 6$. Prebrojavanje rasporeda kuglica iste boje daje rezultat $5 + 30 + 10 = 45$ koji uz objašnjenje nosi **5 bodova** (**1 bod** za slučajeve, po **1 bod** za svaki slučaj, **1 bod** za zbroj), a bez objašnjenja **2 boda**. Ako učenik taj rezultat pomnoži s 24 uz objašnjenje da na taj način određuje boje (pritom zanemarujući da u nekim slučajevima nije bitan poredak kuglica unutar kutije) dobiva još **1 bod**. Ispravno prebrojavanje načina na koje možemo pridružiti boje nosi **1 bod** u prvom slučaju, a po **2 boda** u drugom i trećem slučaju.

Zadatak OŠ-6.5.

Neka su a, b, c i d prirodni brojevi za koje vrijedi

$$a < b < c < d \quad \text{i} \quad V(a, b, c, d) = 120.$$

Najmanji od tih brojeva ima dva djelitelja, a svaki sljedeći dva djelitelja više nego prethodni. Ako je još poznato da vrijedi $V(a, b) = b$, $V(a, c) = c$, $V(a, d) = d$ i $V(b, d) \neq d$, odredi sve mogućnosti za četvorku brojeva (a, b, c, d) .

$V(a, b, c, d)$ je najmanji zajednički višekratnik brojeva a, b, c i d .

Prvo rješenje.

Brojevi a, b, c, d su djelitelji broja 120 pa se nalaze u skupu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$. 1 bod

Broj a ima dva djelitelja pa je $a \in \{2, 3, 5\}$.

Broj b ima četiri djelitelja pa je $b \in \{6, 8, 10, 15\}$.

Broj c ima šest djelitelja pa je $c \in \{12, 20\}$.

Broj d ima osam djelitelja pa je $d \in \{24, 30, 40\}$. 2 boda

Iz uvjeta $V(a, b) = b$, $V(a, c) = c$, $V(a, d) = d$ zaključujemo da je broj a djelitelj brojeva b, c i d . Iz uvjeta $V(b, d) \neq d$ zaključujemo da broj b nije djelitelj broja d . 1 bod

Za $a = 2$, vrijedi $b \in \{6, 8, 10\}$, $c \in \{12, 20\}$, $d \in \{24, 30, 40\}$.

Kako b nije djelitelj broja d , za $b = 6$ jedina mogućnost je $d = 40$, za $b = 8$ jedina mogućnost je $d = 30$ i za $b = 10$ jedina mogućnost je $d = 24$. 1 bod

Rješenja su uređene četvorke $(2, 6, 12, 40)$, $(2, 6, 20, 40)$, $(2, 8, 12, 30)$, $(2, 8, 20, 30)$, $(2, 10, 12, 24)$, $(2, 10, 20, 24)$. 1 bod

Za $a = 3$, vrijedi $b \in \{6, 15\}$, $c = 12$, $d \in \{24, 30\}$.

Zbog uvjeta $b < c$ jedina mogućnost je $b = 6$, ali tada ne postoji broj d koji nije djeljiv sa 6. Ovaj slučaj nema rješenja. 2 boda

Za $a = 5$, vrijedi $b \in \{10, 15\}$, $c = 20$, $d \in \{30, 40\}$. Zbog uvjeta da broj b nije djelitelj broja d , zaključujemo da je $b = 15$ i $d = 40$. Dobivamo rješenje $(5, 15, 20, 40)$. 2 boda

Drugo rješenje.

Rastavimo broj 120 na proste faktore: $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Iz rastava broja 120 na proste faktore i činjenice da broj a ima samo dva djelitelja, zaključujemo da a može biti 2, 3 ili 5.

1 bod

1. slučaj: $a = 2$

Budući da je $V(a, b) = b$ i b ima 4 djelitelja, rastav broja b na proste faktore može biti $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$ ili $2 \cdot 2 \cdot 2$.

1 bod

Budući da je $V(a, c) = c$ i c ima 6 djelitelja, rastav broja c na proste faktore može biti $2 \cdot 2 \cdot 3$ ili $2 \cdot 2 \cdot 5$.

1 bod

Budući da je $V(a, d) = d$ i d ima 8 djelitelja, rastav broja d na proste faktore može biti $2 \cdot 3 \cdot 5$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ ili $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$.

1 bod

Zadano je da je $V(b, d) \neq d$ pa zaključujemo da mora biti

$$b = 2 \cdot 3 = 6 \text{ i } d = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40,$$

$$b = 2 \cdot 5 = 10 \text{ i } d = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24 \text{ ili}$$

$$b = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ i } d = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

1 bod

Imamo mogućnosti $V(2, 6, c, 40) = 120$, $V(2, 10, c, 24) = 120$ i $V(2, 8, c, 30) = 120$, pa c u svim tim mogućnostima može biti 12 ili 20. Moguća rješenja su: $(2, 6, 12, 40)$, $(2, 6, 20, 40)$, $(2, 10, 12, 24)$, $(2, 10, 20, 24)$, $(2, 8, 12, 30)$, $(2, 8, 20, 30)$.

1 bod

2. slučaj: $a = 3$

Budući da je $V(a, b) = b$ i b ima 4 djelitelja, rastav broja b na proste faktore može biti $2 \cdot 3$ ili $3 \cdot 5$.

Budući da je $V(a, c) = c$ i c ima 6 djelitelja, rastav broja c mora biti $2 \cdot 2 \cdot 3$, to jest $c = 12$.

Budući da je $V(a, d) = d$ i d ima 8 djelitelja, rastav broja d mora biti $2 \cdot 3 \cdot 5$, to jest $d = 30$. No, budući da mora vrijediti $V(b, d) \neq d$, ovaj slučaj nema rješenja.

2 boda

3. slučaj: $a = 5$

Budući da je $V(a, b) = b$ i b ima 4 djelitelja, rastav broja b na proste faktore može biti $2 \cdot 5$ ili $3 \cdot 5$.

Budući da je $V(a, c) = c$ i c ima 6 djelitelja, rastav broja c mora biti $2 \cdot 2 \cdot 5$.

Budući da je $V(a, d) = d$ i d ima 8 djelitelja, rastav broja d mora biti $2 \cdot 3 \cdot 5$ ili $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$.

Iz $V(b, d) \neq d$ slijedi da mora biti $b = 3 \cdot 5 = 15$ i $d = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$.

U ovom slučaju dobivamo rješenje $(5, 15, 20, 40)$.

2 boda

Napomena: Svaka uređena četvorka nosi 1 bod uz obrazloženje, a ako učenik nema obrazloženja za svake dvije točno određene uređene četvorke učenik dobiva po 1 bod. Ako učenik odredi svih sedam uređenih četvorki, ali nema obrazloženja zašto su to jedine mogućnosti može dobiti najviše 4 boda.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – osnovna škola

14. ožujka 2025.

Ako učenik ima drugačiji postupak rješavanja zadatka, Povjerenstvo je dužno i taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak OŠ-7.1.

Tri volontera za dva sata napune 40 vreća s pijeskom za obranu od poplave. Za koliko bi sekunda 16 volontera napunilo 60 takvih vreća ako cijelo vrijeme rade istom brzinom?

Prvo rješenje.

Tri volontera za dva sata napune 40 vreća.

Broj vreća trebamo povećati s 40 na 60, tj. $\frac{3}{2}$ puta. 1 bod

Toliko puta će se povećati i broj sati potrebnih da se vreće napune, uz jednak broj volontera: $\frac{3}{2} \cdot 2 = 3$. Dakle, tri volontera za tri sata napune 60 vreća. 2 boda

Više volontera će isti broj vreća napuniti za manje sati, odnosno broj volontera i potrebno vrijeme su obrnuto proporcionalne veličine.

Ako broj volontera povećamo $\frac{16}{3}$ puta, potrebno vrijeme će se smanjiti $\frac{16}{3}$ puta. 1 bod

Dobivamo $3 : \frac{16}{3} = 3 \cdot \frac{3}{16} = \frac{9}{16}$ sati. 2 boda

Jedan sat ima 3600 sekundi. 1 bod

Dobivamo $\frac{9}{16} \cdot 3600 = 9 \cdot 225 = 2025$ sekundi. 2 boda

Dakle, 16 volontera će za 2025 sekundi napuniti 60 vreća pijeskom. 1 bod

Drugo rješenje.

Tri volontera za dva sata napune 40 vreća.

Ako svi volonteri rade istom brzinom, onda 1 volonter za 2 sata napuni $\frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ vreća. 1 bod

Jedan sat ima 3600 sekundi. 1 bod

Dakle, jedan volonter napuni $\frac{40}{3}$ vreća za 7200 sekundi. 1 bod

Da bi napunio jednu vreću, volonteru treba

$7200 : \frac{40}{3} = 7200 \cdot \frac{3}{40} = 180 \cdot 3 = 540$ sekundi (to je 9 minuta). 2 boda

Za 60 vreća trebalo bi mu $540 \cdot 60 = 32400$ sekundi. 2 boda

Ako posao obavlja 16 volontera, trebat će im 16 puta manje vremena. 1 bod

$32400 : 16 = 2025$ 1 bod

Dakle, 16 volontera će za 2025 sekundi napuniti 60 vreća pijeskom. 1 bod

Zadatak OŠ-7.2.

Dunja, Višnja i Jagoda jele su voćnu tortu. Dunja je pojela 20 % više od Višnje, a Jagoda 25 % manje od Dunje. Nisu sve mogle pojesti, pa je ostao komad torte. Da je Dunja pojela 25 % više, Višnja 20 % više, a Jagoda 100 % više od onoga što je pojela, ne bi ostalo ništa. Koliki je udio torte svaka djevojčica pojela i koliko je ostalo? Odgovore zapiši u obliku razlomka.

Rješenje.

Označimo s x dio koji je pojela Višnja.

Dunja je pojela 20 % više, znači da je pojela $1.2x$. 1 bod

Jagoda je pojela 25% manje od Dunje, znači da je pojela $0.75 \cdot 1.2x = 0.9x$. 1 bod

Da je Dunja pojela 25% više, pojela bi $1.25 \cdot 1.2x = 1.5x$. 1 bod

Da je Višnja pojela 20% više, pojela bi $1.2x$. 1 bod

Da je Jagoda pojela 100% više, pojela bi $2 \cdot 0.9x = 1.8x$. 1 bod

Zajedno bi pojele $1.5x + 1.2x + 1.8x = 1$ (cijelu tortu). 1 bod

Vrijedi $4.5x = 1$, odnosno $x = \frac{1}{4.5} = \frac{2}{9}$. Dakle, Višnja je pojela $\frac{2}{9}$ torte. 1 bod

Dunja je pojela $1.2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{12}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{15}$ torte. 1 bod

Jagoda je pojela $0.9 \cdot \frac{2}{9} = \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{5}$ torte. 1 bod

Ostalo je $1 - \left(\frac{2}{9} + \frac{4}{15} + \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{20 + 24 + 18}{90} = 1 - \frac{62}{90} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$ torte. 1 bod

Zadatak OŠ-7.3.

Za prirodne brojeve a i b vrijedi

$$a + ab + b = 441.$$

Odredi sve mogućnosti umnoška ab .

Prvo rješenje.

Vrijedi sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned} a + ab + b &= 441 \\ a + ab + b + 1 &= 442 \\ b(a + 1) + a + 1 &= 442 \\ (a + 1)(b + 1) &= 442 \end{aligned} \quad 3 \text{ boda}$$

Broj 442 rastavljamo na proste faktore: $442 = 2 \cdot 13 \cdot 17$ 2 boda

Broj 442 možemo prikazati kao umnožak dva prirodna broja na sljedeće načine:

$$442 = 1 \cdot 442 = 2 \cdot 221 = 13 \cdot 34 = 17 \cdot 26. \quad 2 \text{ boda}$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a < b$, jer se traži umnožak ab .

Rastav $442 = 1 \cdot 442$ ne daje prirodne brojeve a i b , a iz ostalih rastava imamo sljedeće mogućnosti:

$$a = 1, b = 220, ab = 220$$

1 bod

$$a = 12, b = 33, ab = 396$$

1 bod

$$a = 16, b = 25, ab = 400$$

1 bod

Drugo rješenje.

Vrijedi sljedeći niz jednakosti:

$$a + ab = 441 - b$$

$$a(1 + b) = 441 - b / : (1 + b), \quad b \neq -1$$

$$a = \frac{441 - b}{1 + b}$$

$$a = \frac{441 - b}{1 + b} = \frac{-b - 1 + 442}{b + 1} = \frac{-(b + 1) + 442}{b + 1} = -1 + \frac{442}{b + 1}$$

3 boda

Broj 442 rastavljamo na proste faktore: $442 = 2 \cdot 13 \cdot 17$

2 boda

Broj 442 možemo prikazati kao umnožak dva prirodna broja na sljedeće načine:

$$442 = 1 \cdot 442 = 2 \cdot 221 = 13 \cdot 34 = 17 \cdot 26$$

2 boda

Broj $b + 1$ mora biti djelitelj broja 442 da bi a bio cijeli broj, ali, kako je $a, b \in \mathbb{N}$, promatramo sljedeće mogućnosti:

$b + 1$	b	a	ab
2	1	220	220
221	220	1	220
13	12	33	396
34	33	12	396
17	16	25	400
26	25	16	400

Umnožak ab može biti 220, 396 ili 400.

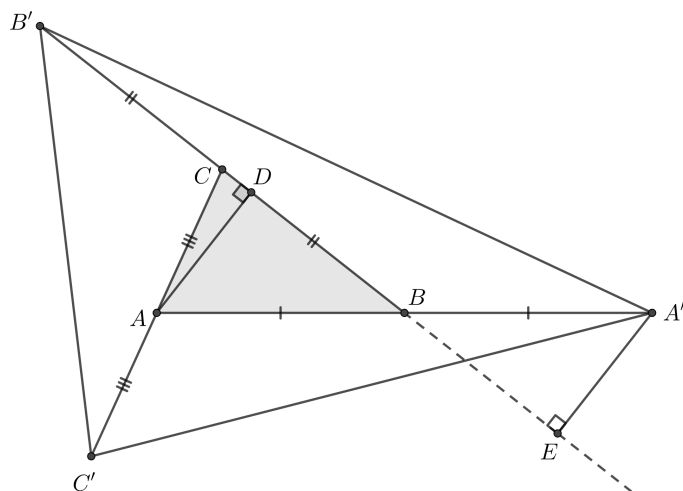
3 boda

Zadatak OŠ-7.4.

Na produžetku stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC preko vrha B označena je točka A' takva da je $|AB| = |BA'|$. Na produžetku stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC preko vrha C označena je točka B' takva da je $|BC| = |CB'|$, a na produžetku stranice $\overline{CA}$ trokuta ABC preko vrha A označena je točka C' takva da je $|CA| = |AC'|$. Koliko je puta površina trokuta $A'B'C'$ veća od površine trokuta ABC ?

Prvo rješenje.

Skica:



1 bod

Neka je točka D nožište visine trokuta ABC iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$, a točka E nožište visine trokuta $BA'B'$ iz vrha A' na pravac BC .

Trokuti ABD i $A'BE$ su sukladni pravokutni trokuti po poučku KSK

1 bod

jer vrijedi $|AB| = |BA'|$

1 bod

i imaju dva para sukladnih kutova (pravi kutovi kod vrhova D i E te vršni kutovi s vrhom B).

1 bod

Iz sukladnosti tih trokuta slijedi $|AD| = |EA'| = v_a$.

1 bod

Površina trokuta ABC jednaka je

$$P_{ABC} = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2} = \frac{a \cdot v_a}{2},$$

1 bod

a površina trokuta $BA'B'$ je

$$P_{BA'B'} = \frac{|BB'| \cdot |EA'|}{2} = \frac{2a \cdot v_a}{2} = 2P_{ABC}$$

1 bod

Na isti se način može pokazati da je $P_{CB'C'} = 2P_{ABC}$ i $P_{A'AC'} = 2P_{ABC}$.

2 boda

Površina trokuta $A'B'C'$ može se izračunati kao zbroj površina trokuta ABC , $BA'B'$, $CB'C'$ i $A'AC'$, odnosno vrijedi

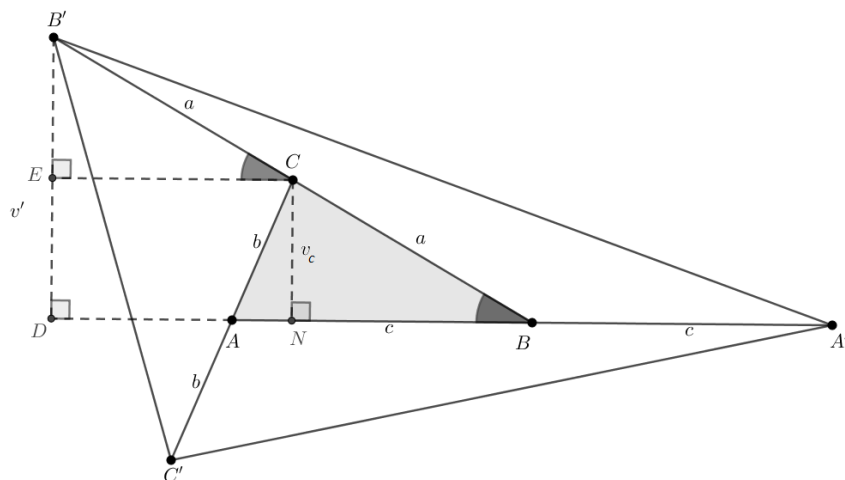
$$P_{A'B'C'} = P_{ABC} + P_{BA'B'} + P_{CB'C'} + P_{A'AC'} = 7P_{ABC}.$$

Prema tome, površina trokuta $A'B'C'$ je 7 puta veća od površine trokuta ABC .

1 bod

Drugo rješenje.

Skica:



1 bod

Neka je točka N nožište visine trokuta ABC iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$, a točka D nožište visine trokuta $BA'B'$ iz vrha B' na pravac AB . Nacrtamo dužinu $\overline{CE}$ paralelnu s DN tako da dobijemo pravokutnik $DNCE$.

Trokuti NBC i ECB' su sukladni pravokutni trokuti po poučku KSK

1 bod

jer vrijedi $|BC| = |CB'|$

1 bod

i imaju dva para sukladnih kutova (pravi kutovi kod vrhova N i E te kutovi s usporednim kracima $\sphericalangle CBA$ i $\sphericalangle B'CE$).

1 bod

Iz sukladnosti tih trokuta slijedi $|CN| = |B'E| = v_c$.

Četverokut $DNCE$ je pravokutnik pa je $|CN| = |ED| = v_c$.

Iz toga slijedi da je $|B'E| = |ED| = v_c$, pa je $|B'D| = 2|CN| = 2v_c$.

1 bod

Površina trokuta ABC jednaka je

$$P_{ABC} = \frac{|AB| \cdot |CN|}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2},$$

1 bod

a površina trokuta $BA'B'$ je

$$P_{BA'B'} = \frac{|BA'| \cdot |B'D|}{2} = \frac{c \cdot 2v_c}{2} = 2P_{ABC}$$

1 bod

Na isti se način može pokazati da je $P_{CB'C'} = 2P_{ABC}$ i $P_{A'AC'} = 2P_{ABC}$.

2 boda

Površina trokuta $A'B'C'$ može se izračunati kao zbroj površina trokuta ABC , $BA'B'$, $CB'C'$ i $A'AC'$, odnosno vrijedi

$$P_{A'B'C'} = P_{ABC} + P_{BA'B'} + P_{CB'C'} + P_{A'AC'} = 7P_{ABC}.$$

Prema tome, površina trokuta $A'B'C'$ je 7 puta veća od površine trokuta ABC .

1 bod

Zadatak OŠ-7.5.

U tablicu s 3 retka i n stupaca treba upisati brojeve na sljedeći način:

- u svakome od triju redaka moraju biti napisani svi prirodni brojevi od 1 do n ,
- zbroj brojeva u svakome stupcu mora biti jednak.

a) Pokaži da n ne može biti 10.

b) Odredi broj takvih rasporeda ako je $n = 5$.

Rješenje.

a) Za $n = 10$ tablica bi imala 3 retka i 10 stupaca.

Ako bi u svakom retku bilo napisano prvih 10 prirodnih brojeva, zbroj svih brojeva u tablici bi bio jednak $3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 3 \cdot 55 = 165$.

Ako bi u svakom stupcu zbroj brojeva bio isti, onda bi zbroj u jednom stupcu trebao biti $165 : 10 = 16.5$.

1 bod

To nije moguće jer je zbroj tri prirodna broja prirodan broj.

1 bod

b) Neka je $n = 5$. Jedan raspored koji zadovoljava uvjete iz zadatka je prikazan u sljedećoj tablici.

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	3	1	4	2

1 bod

Želimo pokazati da bilo kojom zamjenom poretka redaka i stupaca dobivamo drugačiji željeni raspored. Promjenom poretka redaka dobivamo ukupno šest različitih rasporeda:

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	3	1	4	2

1	2	3	4	5
5	3	1	4	2
3	4	5	1	2

3	4	5	1	2
1	2	3	4	5
5	3	1	4	2

3	4	5	1	2
5	3	1	4	2
1	2	3	4	5

5	3	1	4	2
1	2	3	4	5
3	4	5	1	2

5	3	1	4	2
3	4	5	1	2
1	2	3	4	5

U svakom od tih rasporeda možemo promijeniti poredak stupaca tako da u prvom retku raspored brojeva bude redom od 1 do 5. Te rasporede zovemo *temeljnima*:

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	3	1	4	2

1	2	3	4	5
5	3	1	4	2
3	4	5	1	2

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
4	2	5	3	1

1	2	3	4	5
4	2	5	3	1
4	5	1	2	3

1	2	3	4	5
3	5	2	4	1
5	2	4	1	3

1	2	3	4	5
5	2	4	1	3
3	5	2	4	1

1 bod

Promijenimo li poredak stupaca u bilo kojem od tih rasporeda dobit ćemo novi željeni raspored. Svaka dva rasporeda koja se dobivaju na taj način su različita jer će im ili biti različit prvi redak ili im je prvi redak isti, ali su dobiveni od različitih temeljnih rasporeda.

1 bod

Za svaki od temeljnih šest rasporeda premještanjem stupaca dobijemo

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

različitih rasporeda, pa svih mogućih rasporeda ima $6 \cdot 120 = 720$.

1 bod

Dokažimo da ne postoji nijedan drugi raspored koji zadovoljava uvjete zadatka. Svakom takvom rasporedu možemo promijeniti poredak stupaca tako da je prvi redak tablice popunjen redom brojevima od 1 do 5. Tvrdimo da na taj način moramo dobiti jedan od šest temeljnih rasporeda.

Ako bi u svakom retku bilo napisano prvih pet prirodnih brojeva, zbroj svih brojeva u tablici bi bio jednak $3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3 \cdot 15 = 45$. Da bi u svakom stupcu zbroj bio isti, taj zbroj mora biti $45 : 5 = 9$.

1 bod

Taj zbroj se može postići na sljedeće načine:

$$1 + 3 + 5, 1 + 4 + 4, 2 + 2 + 5, 2 + 3 + 4 \text{ i } 3 + 3 + 3.$$

Mogućnost $3 + 3 + 3$ možemo eliminirati jer bismo njome iskoristili sva tri broja 3, a ostatak tablice ne bismo mogli po stupcima ispuniti koristeći samo mogućnosti $1 + 4 + 4$ i $2 + 2 + 5$. Da bi svaki od brojeva u tablici bio zastupljen točno 3 puta, potrebno je dva puta iskoristiti mogućnost $1 + 3 + 5$ i po jednom $1 + 4 + 4$, $2 + 2 + 5$ i $2 + 3 + 4$. Ostale mogućnosti ne postoje.

2 boda

Brojeve 1, 3 i 5 tada možemo upisati u 1., 3. ili 5. stupac. Budući da tu trojku možemo iskoristiti dva puta, možemo ih upisati na tri načina: u 1. i 3. stupac, u 1. i 5. stupac ili u 3. i 5. stupac. Ostale stupce tada možemo popuniti na jedinstven način. Za svaki od ta tri načina zamjenom 2. i 3. retka dobijemo po dva slučaja, što daje točno 6 temeljnih rasporeda.

1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

8. razred – osnovna škola

14. ožujka 2025.

Ako učenik ima drugačiji postupak rješavanja zadatka, Povjerenstvo je dužno i taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak OŠ-8.1.

Odredi vrijednost izraza

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y})(\sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{x+y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{x+y})(\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{x+y})$$

za $x = 0.05$ i $y = 5$.

Prvo rješenje.

Množenjem prve i treće zagrade uz primjenu formule za razliku kvadrata dobivamo

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - (\sqrt{x+y})^2, \quad 2 \text{ boda}$$

odnosno

$$x + 2\sqrt{xy} + y - x - y. \quad 1 \text{ bod}$$

Analogno, množenjem druge i četvrte zagrade dobivamo $x - 2\sqrt{xy} + y - x - y$. 3 boda

Zadani izraz je zato jednak

$$(x + 2\sqrt{xy} + y - x - y)(x - 2\sqrt{xy} + y - x - y) = 2\sqrt{xy}(-2\sqrt{xy}), \quad 1 \text{ bod}$$

odnosno iznosi $-4xy$. 2 boda

Za $x = 0.05$ i $y = 5$ vrijednost izraza je $-4 \cdot 0.05 \cdot 5 = -1$. 1 bod

Drugo rješenje.

Množenjem prvih dviju zagrada dobivamo

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{xy} - \sqrt{x}\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} - \sqrt{y^2} - \sqrt{y}\sqrt{x+y} + \sqrt{x}\sqrt{x+y} - \sqrt{y}\sqrt{x+y} - \sqrt{(x+y)^2},$$

a množenjem treće i četvrte zagrade dobivamo

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{xy} + \sqrt{x}\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} - \sqrt{y^2} + \sqrt{y}\sqrt{x+y} - \sqrt{x}\sqrt{x+y} + \sqrt{y}\sqrt{x+y} - \sqrt{(x+y)^2}. \quad 2 \text{ boda}$$

Sređivanjem izraza dobivamo:

$$(x - y - 2\sqrt{xy + y^2} - (x + y)) \cdot (x - y + 2\sqrt{xy + y^2} - (x + y)), \quad 2 \text{ boda}$$

odnosno

$$(-2y - 2\sqrt{xy + y^2}) \cdot (-2y + 2\sqrt{xy + y^2}). \quad 1 \text{ bod}$$

Množenjem tih dvaju algebarskih izraza dobivamo:

$$\begin{aligned} &= (-2y)^2 - (2\sqrt{xy + y^2})^2 && 2 \text{ boda} \\ &= 4y^2 - 4xy - 4y^2 && 1 \text{ bod} \\ &= -4xy && 1 \text{ bod} \end{aligned}$$

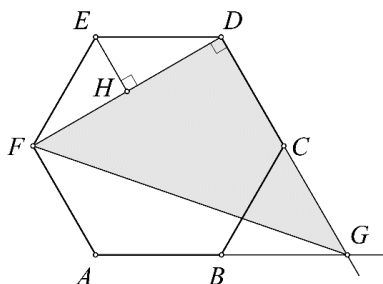
Za $x = 0.05$ i $y = 5$ vrijednost izraza je $-4 \cdot 0.05 \cdot 5 = -1$. 1 bod

Zadatak OŠ-8.2.

Duljina stranice pravilnoga šesterokuta $ABCDEF$ jest 8. Izračunaj površinu trokuta DFG ako je točka G sjecište pravaca AB i CD .

Prvo rješenje.

Skica:



Veličina unutarnjeg kuta pravilnog šesterokuta iznosi 120° . 1 bod

Trokut DEF je jednakokračan, pa je $|\angle DFE| = |\angle EDF| = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. 1 bod

Trokut DFG je pravokutan jer je

$$|\angle FDC| = |\angle EDC| - |\angle EDF| = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

1 bod

Kutovi $\angle GBC$ i $\angle BCG$ vanjski su kutovi pravilnog šesterokuta, tj. $|\angle GBC| = |\angle BCG| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, pa je trokut BGC jednakostraničan. 2 boda

Stoga je $|DG| = |DC| + |CG| = 16$. 1 bod

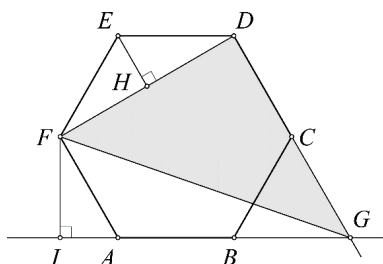
Visina $\overline{EH}$ dijeli trokut DEF na dva sukladna trokuta koji predstavljaju polovicu jednakostraničnog trokuta stranice duljine 8, pa je duljina dužine $\overline{DF}$ jednaka dvostrukoj duljini visine tog jednakostraničnog trokuta, tj.

$$|DF| = 2 \cdot |DH| = 2 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}. \quad \text{2 boda}$$

Površina trokuta DFG je $\frac{|DG| \cdot |DF|}{2} = \frac{16 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 64\sqrt{3}$. 2 boda

Drugo rješenje.

Skica:



Veličina unutarnjeg kuta pravilnog šesterokuta iznosi 120° . 1 bod

Kutovi $\angle GBC$ i $\angle BCG$ vanjski su kutovi pravilnog šesterokuta tj. $|\angle GBC| = |\angle BCG| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ pa je trokut BGC jednakokraničan. 2 boda

Površinu trokuta DFG ćemo izračunati tako da od površine peterokuta $AGDEF$, koja je jednaka zbroju površina pravilnog šesterokuta $ABCDEF$ i jednakokraničnog trokuta BGC , oduzmemo zbroj površina trokuta DEF i AGF , tj.

$$P_{DFG} = P_{ABCDEF} + P_{BGC} - P_{DEF} - P_{AGF} = 6 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} + \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 112\sqrt{3} - P_{DEF} - P_{AGF}. \quad 1 \text{ bod}$$

Trokut DEF je jednakokraničan, pa je $|\angle DFE| = |\angle EDF| = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. 1 bod

Visina $\overline{EH}$ dijeli trokut DEF na dva sukladna trokuta koji predstavljaju polovicu jednakokraničnog trokuta stranice duljine 8, pa je $P_{DEF} = 16\sqrt{3}$. 2 boda

Dužina $\overline{FI}$ visina je trokuta AGF povučena iz vrha F .

Kako je $|FI|$ duljina visine jednakokraničnog trokuta sa stranicom duljine 8 ona iznosi $\frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. 1 bod

Površina trokuta AGF je $\frac{|AG| \cdot |FI|}{2} = \frac{(|AB| + |BG|) \cdot |FI|}{2} = \frac{(8+8) \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$. 1 bod

Površina trokuta DFG je $112\sqrt{3} - 16\sqrt{3} - 32\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$. 1 bod

Napomena: Ako učenik površinu trokuta DFG računa tako da od površine peterokuta $IGDEF$ oduzme zbroj površina trokuta DEF i IGF , slijediti bodovnu shemu navedenu u drugom rješenju.

Zadatak OŠ-8.3.

Svako od polja tablice 3×3 treba obojiti u crvenu, bijelu ili plavu boju te u svako polje treba upisati jedan od brojeva 1, 2 ili 3. Na koliko je različitih načina to moguće učiniti tako da u svakome stupcu i svakome retku polja budu obojena s tri različite boje i u njih budu upisana tri različita broja?

Rješenje.

Uočimo da je broj načina na koji možemo obojiti tablicu jednak broju načina na koji možemo upisati brojeve.

1 bod

Odredimo broj načina na koje možemo rasporediti brojeve 1, 2 i 3 u tablicu prema uvjetu zadatka.

U prvom retku tablice brojeve možemo rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ različitih načina.

2 boda

Sljedeći redak tablice možemo popuniti na dva različita načina jer odabrani broj u prvom stupcu drugog retka ne smije biti isti kao broj u prvom retku i prvom stupcu, a izbor preostala dva broja u drugom retku je jednoznačno određen.

2 boda

1	2	3
2		

1	2	3
3		

Posljednji redak tablice time je jednoznačno određen.

1 bod

Ukupan broj mogućih rasporeda brojeva u tablici je $6 \cdot 2 = 12$.

1 bod

Sveukupan broj rasporeda boja i brojeva u tablici jednak je umnošku broja različitih rasporeda boja i broja različitih rasporeda brojeva.

2 boda

Broj različitih načina popunjavanja tablice uz zadane uvjete je $12 \cdot 12 = 144$.

1 bod

Napomena: Ukoliko učenik sustavno ispiše svih 12 rasporeda brojeva (boja) i time utvrdi da ih ne postoji više, za taj dio zadatka ostvaruje **6 bodova**. To može sustavno napraviti na više načina, prikazat ćemo jedan mogući.

Najprije ispišimo sve dopuštene rasporede s brojem 1 u prvom retku i prvom stupcu,

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
2	1	3
3	2	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

potom ispišimo sve dopuštene rasporede s brojem 2 u prvom retku i prvom stupcu,

2	1	3
1	3	2
3	2	1

2	1	3
3	2	1
1	3	2

2	3	1
1	2	3
3	1	2

2	3	1
3	1	2
1	2	3

a na kraju ispišimo sve dopuštene rasporede s brojem 3 u prvom retku i prvom stupcu.

3	1	2
1	2	3
2	3	1

3	1	2
2	3	1
1	2	3

3	2	1
1	3	2
2	1	3

3	2	1
2	1	3
1	3	2

Ukoliko učenik nesustavno ispiše svih 12 rasporeda brojeva (boja) i ni na koji način ne objasni zašto ih nema više od 12, ostvaruje **4 boda** od mogućih **6 bodova** za taj dio zadatka.

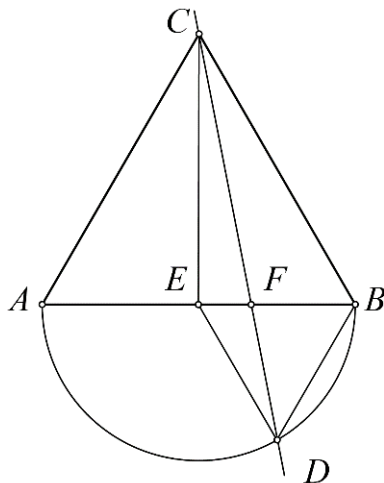
Zadatak OŠ-8.4.

Duljina stranice jednakostraničnog trokuta ABC jest 18. Nad stranicom $\overline{AB}$ izvan trokuta konstruirana je polukružnica. Točka D pripada polukružnici i dijeli je u omjeru $2 : 1$. Izračunaj udaljenost točke C i sjecišta pravca DC sa stranicom $\overline{AB}$.

Prvo rješenje.

Neka je točka E polovište stranice $\overline{AB}$ tj. središte polukružnice koja je nacrtana nad stranicom $\overline{AB}$, izvan trokuta, a točka F sjecište pravca CD i stranice $\overline{AB}$.

Skica:



1 bod

Uočimo da je $|EB| = |ED| = 9$.

1 bod

Točka D dijeli kružnicu u omjeru $2:1$ pa je $|\angle DEB| = 60^\circ$.

1 bod

Zaključujemo da je trokut EDB jednakostraničan. S obzirom da su kutovi $\angle CFA$ i $\angle DFB$ vršni kutovi i $|\angle FAC| = |\angle FBD| = 60^\circ$ prema KK poučku o sličnosti trokuta zaključujemo je $\triangle AFC \sim \triangle BFD$.

1 bod

Stoga je $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AC|}{|BD|} = \frac{18}{9} = 2$.

2 boda

Vrijedi $|AB| = |AF| + |FB| = 3|FB|$, iz čega zaključujemo $18 = 3|FB|$, tj. $|FB| = 6$.

Slijedi $|EF| = |EB| - |FB| = 9 - 6 = 3$.

1 bod

Trokut EFC je pravokutan trokut kojemu su katete duljina $|EF|$ i $|CE|$.

Dužina $\overline{CE}$ je visina jednakostraničnog trokuta ABC pa je $|CE| = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$.

1 bod

Prema Pitagorinom poučku za pravokutni trokut EFC imamo:

$$|CF|^2 = |EF|^2 + |CE|^2$$

1 bod

$$|CF| = \sqrt{3^2 + (9\sqrt{3})^2} = \sqrt{252} = 6\sqrt{7}.$$

1 bod

Udaljenost točke C i sjecišta pravca DC sa stranicom $\overline{AB}$ je $6\sqrt{7}$.

Napomena: Ako je učenik umjesto sličnosti trokuta AFC i BFD koristio sličnost trokuta EDF i BCF te dobio $\frac{|BF|}{|EF|} = \frac{18}{9} = 2$, $|BE| = |BF| + |EF| = 3|EF|$, $9 = 3|EF|$ tj. $|EF| = 3$ treba ostvariti **3 boda** kako je navedeno u bodovnoj shemi.

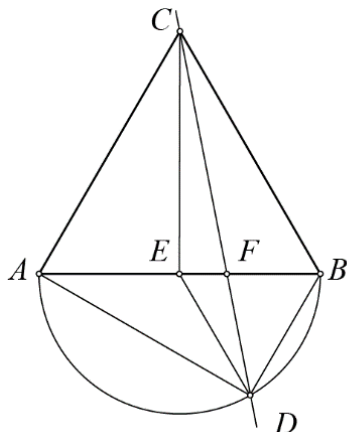
Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju dokazujemo $\triangle AFC \sim \triangle BFD$.

4 boda

Iz $\triangle AFC \sim \triangle BFD$ zaključujemo da je $\frac{|CF|}{|DF|} = \frac{18}{9} = 2$.

2 boda



Vrijedi:

$$|CF| = |CD| - |DF|$$

$$|CF| = |CD| - \frac{1}{2}|CF|$$

$$|CF| = \frac{2}{3}|CD|$$

1 bod

Trokut ADB je pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu D , jer je obodni kut nad promjerom kružnice pravi, pa prema Pitagorinom poučku imamo:

$$|AD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2$$

$$|AD| = \sqrt{18^2 - 9^2} = 9\sqrt{3}.$$

1 bod

Trokut ADC je pravokutni trokut jer je $|\angle DAC| = |\angle DAE| + |\angle EAC| = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ pa prema Pitagorinom poučku imamo:

$$|CD|^2 = |AD|^2 + |AC|^2$$

$$|CD| = \sqrt{18^2 + (9\sqrt{3})^2} = 9\sqrt{7}.$$

1 bod

Iz $|CF| = \frac{2}{3}|CD|$ slijedi $|CF| = 6\sqrt{7}$.

1 bod

Udaljenost točke C i sjecišta pravca DC sa stranicom $\overline{AB}$ je $6\sqrt{7}$.

Zadatak OŠ-8.5.

Može li zbroj prvih n prirodnih brojeva biti jednak zbroju kvadrata triju uzastopnih prirodnih brojeva?

Rješenje.

Zbroj prvih n prirodnih brojeva je $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. 2 boda

Zbroj kvadrata triju uzastopnih prirodnih brojeva, za $m \in \mathbb{N}$ i $m \geq 2$ zapisujemo

$$(m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 = m^2 - 2m + 1 + m^2 + m^2 + 2m + 1 = 3m^2 + 2. \quad 2 \text{ boda}$$

Kako prirodni broj $3m^2 + 2$ pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2, razmotrimo slučajeve mogućih ostataka broja $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ pri dijeljenju s 3.

1. Ako je $n = 3k$, za $k \in \mathbb{N}$, onda je $\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{3k \cdot (3k+1)}{2}$ prirodan broj koji pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0. 1 bod
2. Ako je $n = 3k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$, onda je $\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{(3k+1) \cdot (3k+2)}{2} = \frac{9k^2+9k+2}{2} = 3 \cdot \frac{3k \cdot (k+1)}{2} + 1$ prirodan broj koji pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1. 2 boda
3. Ako je $n = 3k+2$, $k \in \mathbb{N}_0$, onda je $\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{(3k+2) \cdot (3k+3)}{2} = \frac{9k^2+12k+6}{2} = 3 \cdot \frac{3k^2+4k+2}{2}$ prirodan broj koji pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0. 2 boda

Ostatak pri dijeljenju zbroja prvih n prirodnih brojeva s 3 može biti samo 0 ili 1 čime smo pokazali da zbroj bilo kojih prvih n prirodnih brojeva ne može biti jednak zbroju kvadrata triju uzastopnih prirodnih brojeva. 1 bod

Napomena: Zbroj kvadrata triju uzastopnih prirodnih brojeva možemo, za neki prirodni broj m , zapisati i ovako:

$$\begin{aligned} m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2 \\ &= m^2 + m^2 + 2m + 1 + m^2 + 4m + 4 \\ &= 3m^2 + 6m + 5 \quad 1 \text{ bod} \\ &= 3(m^2 + 2m + 1) + 2 \quad 1 \text{ bod} \end{aligned}$$

Daljnji postupak se nastavlja na prethodno opisani način.