

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

14. ožujka 2025.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I Taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak A-1.1.

Marija i Eva vozile su se istim putom iz grada A u grad C . Mariji je trebalo 96 minuta, a Evi 4 minute više. Točno na pola puta između gradova A i C nalazi se grad B . Marija je cijelim putom od A do C vozila istom brzinom, dok je Eva od grada A do grada B vozila 13 km/h sporije od Marije, a od grada B do grada C 13 km/h brže od Marije. Koliko su udaljeni gradovi A i C ?

Rješenje.

Kako bismo ujednačili mjerne jedinice vremena ćemo izraziti u satima.

Marijino putovanje trajalo je $\frac{96}{60} = \frac{8}{5}$ sati, a Evino $\frac{100}{60} = \frac{5}{3}$ sati.

Neka je s udaljenost između gradova A i C , a v Marijina brzina. Tada vrijedi

$$v = \frac{s}{8/5} = \frac{5}{8}s. \quad 2 \text{ boda}$$

Vrijeme potrebno da Eva dođe od grada A do grada B iznosi $\frac{s/2}{v-13}$, a vrijeme potrebno da dođe od grada B do grada C iznosi $\frac{s/2}{v+13}$. Zato je ukupno vrijeme

$$\frac{s/2}{v-13} + \frac{s/2}{v+13} = \frac{5}{3}. \quad 2 \text{ boda}$$

Svođenjem na zajednički nazivnik dobivamo $\frac{sv}{v^2-169} = \frac{5}{3}$. 1 bod

Korištenjem $v = \frac{5}{8}s$ izrazimo gornju jednadžbu samo preko v . Dobivamo

$$\frac{\frac{8}{5}v^2}{v^2-169} = \frac{5}{3}, \quad 2 \text{ boda}$$

odakle slijedi $v^2 = 65^2$, tj. $v = 65$ km/h. 2 boda

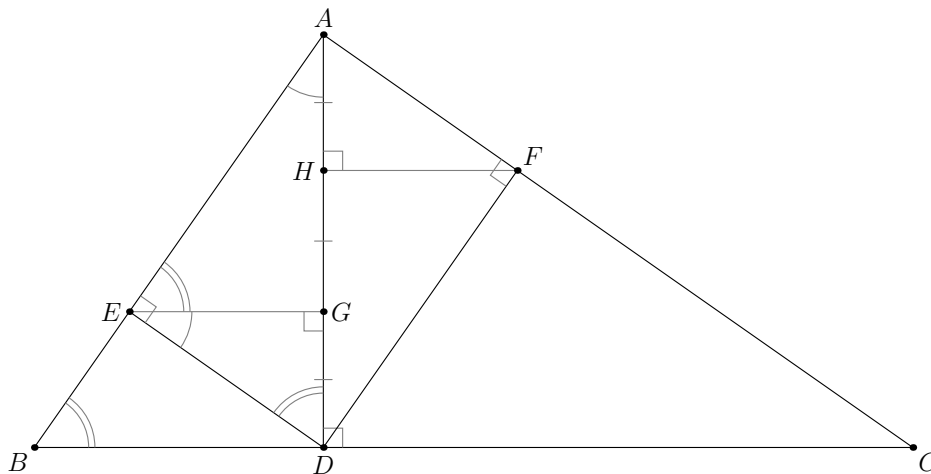
Iz prve jednadžbe dobivamo $s = \frac{8}{5} \cdot 65 = 104$, odnosno zaključujemo da je udaljenost gradova A i C jednaka 104 km. 1 bod

Napomena: Nakon što se dobije sustav jednađbi po s i v (što vrijedi prvi 5 bodova gornje bodovne sheme), sustav se može riješiti i po nepoznanici s . Tada nosi eliminacija nepoznanice v , 3 boda nosi rješavanje jednađbe po s . 2 boda

Zadatak A-1.2.

Neka je D nožište visine iz vrha A u šiljastokutnome trokutu ABC . Točke E i F su redom nožišta okomica iz točke D na AB i AC , a točke G i H redom su nožišta okomica iz E i F na AD . Ako je $|AH| = |HG| = |GD| = 2$, odredi površinu trokuta ABC .

Rješenje.



Označimo s α mjeru kuta $\angle BAD$. Tada je i $\angle GED = \alpha$, jer se radi o kutovima s okomitim krakima. Zato su trokuti AEG , ABD i EDG pravokutni trokuti kojima je po jedan šiljasti kut jednak, pa su svi slični po K-K poučku o sličnosti trokuta. 1 bod

Iz sličnosti trokuta AEG i EDG dobivamo

$$\frac{|AG|}{|EG|} = \frac{|EG|}{|GD|},$$

odakle je $|EG|^2 = |AG| \cdot |GD| = 8$, odnosno $|EG| = 2\sqrt{2}$. 2 boda

Iz sličnosti trokuta AEG i ABD dobivamo omjer

$$\frac{|AG|}{|EG|} = \frac{|AD|}{|BD|},$$

pa zaključujemo da je

$$|BD| = \frac{|AD|}{|AG|} \cdot |EG| = \frac{3}{2}|EG| = 3\sqrt{2}. 1 \text{ bod}$$

Analogno, po K-K poučku o sličnosti trokuta zaključujemo da su pravokutni trokuti AFH , ACD i FDH slični, jer su $\angle DAC$ i $\angle HFD$ kutovi s okomitim krakima. 1 bod

Kao kod računa duljine $|EG|$, iz sličnosti trokuta AFH i FDH dobivamo

$$|HF| = 2\sqrt{2}, 2 \text{ boda}$$

a iz sličnosti trokuta AFH i ACD slijedi $|DC| = 3|HF| = 6\sqrt{2}$.

1 bod

Konačno, za površinu trokuta ABC vrijedi

$$P = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2} = \frac{(|BD| + |DC|) \cdot (|AH| + |HG| + |GD|)}{2} = \frac{9\sqrt{2} \cdot 6}{2} = 27\sqrt{2}.$$

2 boda

Napomena: U ovom zadatku svi trokuti AEG , ABD , EDG , DBE i ADE su međusobno su slični. Prvi bod bodovne sheme ostvaruje se za tvrdnju da su bilo koja tri od navedenih pet trokuta međusobno slična. Analogno, peti bod ostvaruje se za tvrdnju da su bilo koja tri od sljedeći pet trokuta međusobno slična: AFH , ACD , FDH , ADF , DCF .

Umjesto izražavanja duljine $|EG|$ pomoću duljina dužina na pravcu AD , koristeći odgovarajuće sličnosti moguće je izraziti duljinu neke od dužina $|AE|$ i $|ED|$, a onda do duljine $|BD|$ doći primjenama Pitagorinog poučka i ostale omjere iz dobivenih sličnosti. Rješenja koja dokažu da je $|AE| = 2\sqrt{6}$ ili $|ED| = 2\sqrt{3}$ dobivaju 1 bod, te ti bodovi nisu aditivni s 2 boda za dokaz tvrdnje $|EG| = 2\sqrt{2}$ iz gornjeg rješenja. Slično, jedna od dokazanih tvrdnji $|AF| = 2\sqrt{3}$ ili $|DF| = 2\sqrt{6}$ ostvaruje 1 bod, neaditivan s bodovima za tvrdnju $|HF| = 2\sqrt{2}$.

Zadatak A-1.3.

Odredi sve prirodne brojeve m i n , $m < n$, takve da je razlika umnoška prvih n prirodnih brojeva i umnoška prvih m prirodnih brojeva broj oblika 600^k pri čemu je k prirodan broj.

Rješenje.

Označavamo s $n!$ umnožak prvih n prirodnih brojeva. Zadatak je odrediti prirodne brojeve m , n i k takve da je

$$n! - m! = 600^k.$$

Iz jednadžbe mora vrijediti $n! > 600^k \geq 600 > 120 = 5!$, pa zaključujemo da je $n \geq 6$.

Broj $n!$ umnožak je nekoliko prirodnih brojeva uključujući i broj 5. To znači da su $n!$ i 600^k djeljivi s 5, pa je nužno i $m!$ djeljiv s 5. To će biti samo u slučaju ako $m!$ u sebi ima faktor djeljiv s 5, što je moguće samo ako je $m \geq 5$.

1 bod

Kada bi bilo $m \geq 7$, zbog $n > m$ imali bismo da u umnošku prvih n i prvih m prirodnih brojeva imamo broj djeljiv sa 7, pa je lijeva strana jednadžbe djeljiva sa 7. Međutim, broj 600^k nije djeljiv sa 7, pa zaključujemo da je nužno $m \leq 6$. Dakle, imamo da je $m = 5$ ili $m = 6$.

2 boda

Provjerimo slučajeve kada je $k = 1$: ako je $m = 5$, tada je $n! = 600 + 120 = 720$, odnosno $n = 6$, čime smo dobili jedno rješenje jednadžbe; ako je $m = 6$, tada je $n! = 600 + 720 = 1320$, što nema rješenja.

1 bod

Nadalje, pretpostavljamo da je $k \geq 2$. Promotrimo prvo slučaj kada je $m = 5$. Dijeljenjem početne jednadžbe sa 120, odnosno umnoškom prvih 5 prirodnih brojeva, dobivamo

$$n(n-1) \cdot \dots \cdot 6 - 1 = 5 \cdot 600^{k-1}.$$

Kako je $k \geq 2$ desna strana je parna. Također, kako je $n > m = 5$, odnosno $n \geq 6$, imamo da je lijeva strana neparna pa zaključujemo da ova jednadžba nema rješenja.

3 boda

Ako je $m = 6$, jednadžbu sada možemo pisati kao

$$n(n-1) \cdot \dots \cdot 6 - 6 = 5 \cdot 600^{k-1}.$$

Desna strana jednadžbe djeljiva je s 4, pa mora biti i lijeva. Kako 6 nije djeljiv s 4, ne smije biti ni prvi izraz, a to će biti samo ako je $n < 8$.

2 boda

Kako je $n > m = 6$, preostao je samo slučaj $n = 7$. No tada broj $n! - m! = 7! - 6! = 4320$ nije potencija broja 600.

1 bod

Konačno, jedini takvi prirodni brojevi n i m su $n = 6$ i $m = 5$.

Napomena: Jednakosti $n(n-1) \cdot \dots \cdot 6 - 1 = 5 \cdot 600^{k-1}$ i $n(n-1) \cdot \dots \cdot 6 - 1 = 5 \cdot 600^{k-1}$ moguće je odjednom svesti na provjeru nekoliko mogućnosti promatrajući ostatke pri dijeljenju s 5 (zaključujemo da je $n < 10$ jer bi prvi izraz s lijeve strane i desna strana bila djeljiva s 5, a preostali izraz u jednakosti ne) ili promatrajući ostatke pri dijeljenju s 4 (zaključujemo da je $n < 8$). U svakom od slučajeva $m = 5$ i $m = 6$ ograničavanje vrijednosti n nosi po 2 boda (moguće zbrojiti u 4 boda ako se to ograničavanje vrši zajedno za obje mogućnosti m), dok provjera svih mogućnosti u svakom od slučaja $m = 5$ i $m = 6$ nosi po 1 bod.

Tvrdnja da je $n = 6$, $m = 5$ rješenje bez argumenata da je to jedino rješenje nosi 1 bod, što odgovara četvrtom bodu iz bodovne sheme.

Zadatak A-1.4.

Odredi najveću moguću vrijednost koju može poprimiti izraz

$$\frac{a^2 + b^2 + ab - 4a - 2b + 7}{a^2 + b^2 - 4a + 6},$$

pri čemu su a i b realni brojevi.

Rješenje.

Označimo početni izraz s I . Primijetimo da je

$$\begin{aligned} I &= \frac{a^2 + b^2 + ab - 4a - 2b + 7}{a^2 + b^2 - 4a + 6} = 1 + \frac{ab - 2b + 1}{a^2 + b^2 - 4a + 6} & 2 \text{ boda} \\ &= 1 + \frac{(a-2)b + 1}{(a-2)^2 + b^2 + 2} & 2 \text{ boda} \end{aligned}$$

Korištenjem $[(a-2)+b]^2 \geq 0$, što vrijedi jer je kvadrat realnog broja uvijek nenegativan, dobivamo

$$2(a-2)b \leq (a-2)^2 + b^2,$$

2 boda

odnosno

$$\frac{(a-2)b + 1}{(a-2)^2 + b^2 + 2} \leq \frac{1}{2}.$$

2 boda

Zato vrijedi

$$I = 1 + \frac{(a-2)b + 1}{(a-2)^2 + b^2 + 2} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

1 bod

Jednakost se postiže za bilo koje realne brojeve za koje vrijedi $a - 2 + b = 0$ i tada početni izraz poprima najveću moguću vrijednost $\frac{3}{2}$.

1 bod

Zadatak A-1.5.

Na ploču dimenzija 4×4 treba rasporediti određeni broj žetona tako da se na nekim poljima nalazi po jedan žeton, a neka su polja prazna. Za raspored žetona kažemo da je *siguran* ako se svaki žeton nalazi na polju kojemu su sva susjedna polja prazna (dva polja smatraju se susjednima ako imaju zajedničku stranicu). Za koji najmanji prirodan broj k postoji siguran raspored k žetona takav da se na ploču ne može dodati nijedan žeton, a da raspored i dalje bude siguran?

Prvo rješenje.

Odgovor je $k = 4$.

1 bod

Primijetimo da za svaki postavljeni žeton na ploči postoji najviše 5 polja na koja se ne može postaviti žeton. To su polje na kojem je žeton, i sva njemu susjedna polja (kojih je najmanje 4).

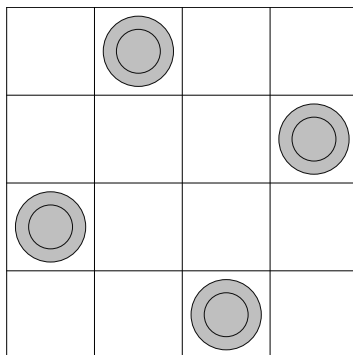
2 boda

Pretpostavimo da je moguće postići željeni raspored s $k \leq 3$ žetona. Tada postoji ukupno najviše $k \cdot 5 \leq 15$ polja na koje se ne može dodati žeton. Kako na ploči imamo 16 polja, ostaje barem jedno polje na koje se može dodati žeton, dakle mora vrijediti $k \geq 4$.

4 boda

Jedan siguran raspored s četiri žetona dan je na slici.

3 boda



Drugo rješenje.

Odgovor je $k = 4$.

1 bod

Promotrimo polje koje se nalazi u gornjem lijevom kutu ploče te njemu susjedna polja (ispod i desno od njega). Na jednom od ta tri polja mora se nalaziti žeton, u suprotnom bi se mogao dodati žeton na kutno polje.

4 boda

Isto možemo zaključiti i za preostala kutna polja ploče.

1 bod

Kako među kutnim poljima i njima susjednim poljima nema preklapanja, potrebno nam je barem 4 žetona za siguran raspored.

1 bod

Primjer sigurnog rasporeda s četiri žetona je isti kao u prvom rješenju.

3 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

14. ožujka 2025.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I Taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak A-2.1.

Nad jednom stranicom pravokutnika kao promjerom nacrtan je polukrug. Uniju toga pravokutnika i polukruga nazivamo *prozorom*. Poznato je da je opseg prozora 4 m. Odredi promjer polukruga tako da površina prozora bude najveća moguća.

Rješenje.

Označimo polumjer kruga sa r . Tada duljina jedne stranice pravokutnika iznosi $2r$. Neka je a duljina druge stranice pravokutnika.

Opseg prozora jednak je zbroju opsega pravokutnika bez jedne stranice duljine $2r$ i duljine polukružnice polumjera r , odnosno vrijedi

$$2r + 2a + r\pi = 4, \quad 1 \text{ bod}$$

$$\text{iz čega slijedi } a = 2 - r \left(1 + \frac{\pi}{2}\right). \quad 2 \text{ boda}$$

Površina prozora jednaka je zbroju površina pravokutnika i polukruga, odnosno vrijedi

$$P = a \cdot 2r + \frac{r^2\pi}{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Uvrštavanjem a u izraz za površinu, dobivamo

$$\begin{aligned} P &= \left(2 - r \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot 2r + \frac{r^2\pi}{2} = (4 - 2r - \pi r) \cdot r + \frac{r^2\pi}{2} \\ &= \left(-\frac{\pi}{2} - 2\right) r^2 + 4r. \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Površina prozora je kvadratna funkcija u nepoznanici r . Kako je vodeći koeficijent negativan, najveća moguća vrijednost postiže se u tjemenu funkcije. 2 boda

Prema tome, najveća moguća vrijednost postiže se za polumjer

$$r = \frac{-4}{2\left(-\frac{\pi}{2} - 2\right)} = \frac{4}{\pi + 4}. \quad 2 \text{ boda}$$

Napomena: Nije potrebno računati iznos maksimalne površine, i on se ne boduje.

Zadatak je moguće riješiti i tako da se polumjer izrazi pomoću stranice. Tada vrijedi

$$r = \frac{4 - 2a}{2 + \pi}$$
$$P = \frac{-8 - 2\pi}{(2 + \pi)^2}a^2 + \frac{16}{(2 + \pi)^2}a + \frac{8\pi}{(2 + \pi)^2},$$

a najveća vrijednost postiže se za $a = \frac{4}{4 + \pi}$. Bodovanje je analogno prethodnom rješenju: zadnja 2 boda gornje bodovne sheme rastavljaju se na 1 bod za izračunatu vrijednost a , te 1 bod za izračunatu vrijednost r .

Zadatak A-2.2.

Odredi sve trojke realnih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju sustav jednačbi

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y} = z - 1 \\ \sqrt{y^2 - z} = x - 1 \\ \sqrt{z^2 - x} = y - 1. \end{cases}$$

Prvo rješenje.

Kvadriranjem svake od jednačbi dobivamo

$$\begin{aligned} x^2 - y &= z^2 - 2z + 1, \\ y^2 - z &= x^2 - 2x + 1, \\ z^2 - x &= y^2 - 2y + 1. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo $x + y + z = 3$. 2 boda

Sada zbrajanjem početnih jednakosti slijedi

$$\sqrt{x^2 - y} + \sqrt{y^2 - z} + \sqrt{z^2 - x} = x + y + z - 3 = 0. \quad 2 \text{ boda}$$

Kako je svaki od izraza s lijeve strane gornje jednakosti nenegativan broj, a njihova suma iznosi 0, mora vrijediti

$$x^2 - y = y^2 - z = z^2 - x = 0,$$

odnosno

$$x^2 = y, \quad y^2 = z, \quad z^2 = x. \quad 1 \text{ bod}$$

Uvrštavanjem prve jednakosti u drugu imamo $z = y^2 = (x^2)^2 = x^4$. Uvrštavanjem u zadnju jednakost slijedi $x = z^2 = (x^4)^2 = x^8$. 1 bod

Jedina moguća rješenja su $x = 0$ ili $x = 1$. Iz $x = 0$ slijedi $y = 0$ i $z = 0$. Međutim, tada prva jednačba sustava glasi $0 = -1$, čime dobivamo kontradikciju. Prema tome, rješenje $x = 0$ odbacujemo. 1 bod

Iz $x = 1$ slijedi $x = y = z = 1$. 1 bod

Direktnim uvrštavanjem u početni sustav, vidimo da to zaista jest rješenje. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, možemo zaključiti $x + y + z = 3$.

3 boda

Iz jednakosti $\sqrt{x^2 - y} = z - 1$ možemo zaključiti $z - 1 \geq 0$, odnosno $z \geq 1$. Analogno zaključujemo i $x \geq 1$, $y \geq 1$.

1 bod

Budući da vrijedi $3 = x + y + z \geq 1 + 1 + 1 = 3$, kako bi se postigla jednakost, nužno je $x = y = z = 1$.

5 bodova

Direktnim uvrštavanjem u početni sustav, vidimo da to zaista jest rješenje.

1 bod

Napomena: U oba rješenja zadnji **1 bod** ostvaruje se ako se u početnom sustavu provjeri da $x = y = z = 1$ zaista jest rješenje, što može biti i bez postupka u kojem se pokazuje da to jest jedino rješenje.

Zadatak A-2.3.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) takve da su rješenja jednadžbe $x^2 - ax + b = 0$ dva različita prosta prirodna broja, a rješenja jednadžbe $x^2 - bx + (5a - 5) = 0$ dva različita složena prirodna broja.

Prvo rješenje.

Označimo rješenja prve jednadžbe p i q , a rješenja druge jednadžbe m i n .

Prema Vièteovim formulama vrijedi $p + q = a$ i $pq = b$.

1 bod

Iz Vièteovih formula imamo i $m + n = b$ te $mn = 5a - 5$.

1 bod

Pretpostavimo prvo da su p i q oba neparni.

Iz toga slijedi da je a paran broj, a b neparan.

Kako je b neparan, iz $b = m + n$ slijedi da je jedan od brojeva m i n paran, a drugi neparan. Međutim, tada bi njihov umnožak bio paran. Kako je $5a - 5$ neparan broj, dolazimo do kontradikcije. Prema tome, p i q ne mogu biti oba neparni.

1 bod

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $q = 2$. Tada je

$$m + n = b = 2p, \quad mn = 5a - 5 = 5(2 + p) - 5 = 5p + 5.$$

Množenjem druge jednakosti s 2 i uvrštavanjem $2p = m + n$ dobivamo

$$2mn = 5m + 5n + 10.$$

1 bod

Množenjem ove jednakosti s 2 dobivamo

$$4mn = 10m + 10n + 20,$$

odnosno

$$(2m - 5)(2n - 5) = 45.$$

3 boda

Bez smanjenja općenitosti neka je $m \leq n$. Broj 45 na tri načina možemo napisati kao umnožak dva prirodna broja, kao $1 \cdot 45$, $3 \cdot 15$ ili $5 \cdot 9$. Dakle, preostaje provjeriti tri slučaja.

1 bod

U prvom slučaju imamo $2m - 5 = 1$, $2n - 5 = 45$, odakle je $m = 3$, što nije složen broj. U drugom slučaju je $2m - 5 = 3$, $2n - 5 = 15$, gdje za rješenje dobivamo složene brojeve $m = 4$ i $n = 10$. U trećem slučaju iz $2m - 5 = 5$, $2n - 5 = 9$, slijedi $m = 5$, što nije složen broj.

1 bod

Dakle, jedina mogućnost je $m = 4$, $n = 10$. U tom slučaju je $p = \frac{m+n}{2} = 7$, što jest prost broj, pa stvarno dobivamo rješenja. Uvrštavanjem za a i b dobivamo $a = 9$ i $b = 14$.

1 bod

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju, zaključimo da je $q = 2$ te da vrijedi

$$m + n = 2p, \quad mn = 5p + 5.$$

3 boda

Iz prve jednadžbe slijedi $n = 2p - m$, a uvrštavanjem u drugu slijedi

$$m^2 - 2pm + 5p + 5 = 0.$$

1 bod

Ovo je kvadratna jednadžba, koja mora imati cjelobrojna rješenja pa joj diskriminanta $D := 4p^2 - 20p - 20$ mora biti potpun kvadrat.

1 bod

Međutim, primijetimo da je

$$4p^2 - 20p - 20 = (2p - 5)^2 - 45 < (2p - 5)^2,$$

2 boda

pa je $4p^2 - 20p - 20 \leq (2p - 6)^2$, što je ekvivalentno s $p \leq 14$.

1 bod

Kako je p prost broj različit od 2, preostaje provjeriti je li diskriminanta potpun kvadrat u slučajevima kada je p jednak jednom od brojeva 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Direktnim uvrštavanjem za $p = 2$, $p = 3$ i $p = 5$ dobivamo redom $D = -44$, $D = -44$ i $D = -20$, što očito nisu potpuni kvadrati. U slučaju $p = 7$ dobivamo potpun kvadrat $D = 36$. U slučajevima $p = 11$ i $p = 13$ dobivamo redom $D = 244$ i $D = 396$, što nisu potpuni kvadrati.

1 bod

Za $p = 7$, za m i n dobivamo vrijednosti 4 i 10, što jesu složeni brojevi, pa u ovom slučaju dobivamo rješenje. Pripadne vrijednosti a i b su $a = 9$, $b = 14$.

1 bod

Napomena: Rješenja prate sljedeću bodovnu shemu (navedeno istim redoslijedom kao u gornjim rješenjima):

- korištenje Vièteovih formula (ukupno 2 boda, po jedan u svakoj od jednadžbi);
- dokaz da je jedno rješenje prve kvadratne jednadžbe jednako 2 (1 bod);
- zapis jedne diofantske jednadžbe po dvije nepoznanice, bilo po (m, n) , bilo po (p, m) (1 bod);
- zaključivanje o dobivenoj diofantskoj jednadžbi iz kojeg se može vidjeti da je nužno provjeriti nekoliko mogućnosti (3 boda, koje je moguće rastaviti na manje bodove ovisno o strategiji ograničavanja: u prvom rješenju to je faktoriziranje diofantske s konstantnom desnom stranom, a u drugom korištenje nejednakosti);

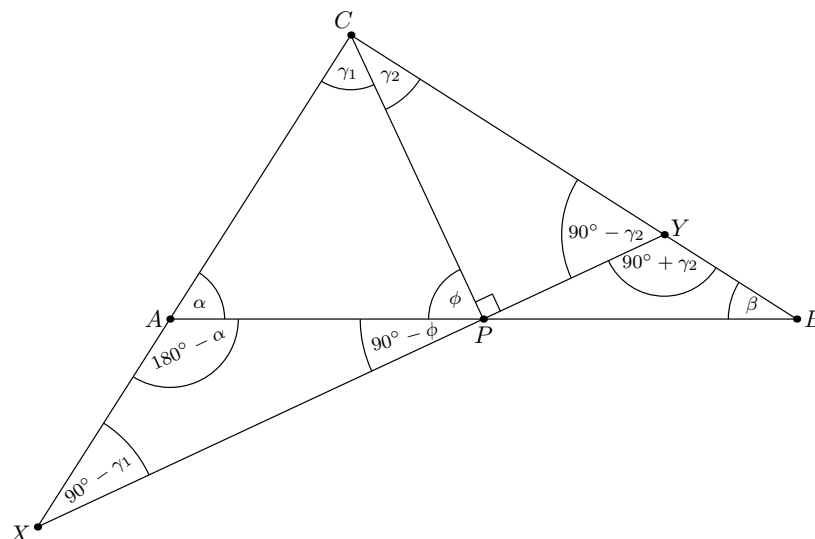
- opisivanje skupa svih preostalih slučajeva koje je potrebno provjeriti (1 bod);
- odbacivanje svih slučajeva osim onog u kojem dobivamo rješenje zadatka (1 bod);
- pronalazak jedinog rješenja $a = 9$ i $b = 14$, s provjerom (1 bod).

Zadnji bod ostvaruje se samo ako je provjereno da su u tom slučaju rješenja prve kvadratne jednadžbe 2 i 7, što su prosti brojevi, a rješenja druge kvadratne jednadžbe 4 i 10, što su složeni brojevi. Taj bod može se ostvariti i ako nema drugih elemenata rješavanja zadatka, odnosno ako nema argumenata da je to jedino moguće rješenje.

Zadatak A-2.4.

Dan je raznostraničan trokut ABC . Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$. Okomica na pravac CP u točki P siječe pravce AC i BC redom u točkama X i Y , pri čemu je A između X i C te Y između B i C . Pretpostavimo da vrijedi $|AX| \cdot |AC| = |BY| \cdot |BC|$. Dokaži da je trokut ABC pravokutan.

Prvo rješenje.



Označimo s α i β mjere kutove trokuta ABC pri vrhovima A i B . Neka je $\gamma_1 = \angle ACP$ i $\gamma_2 = \angle PCB$ te $\phi = \angle CPA$.

Kako je pravac CP okomit na pravac XY , zaključujemo da je $\angle XPA = \angle BPY = 90^\circ - \phi$. Kako su trokuti XPC i YPC pravokutni, možemo zaključiti i da je $\angle CXP = 90^\circ - \gamma_1$, $\angle CYP = 90^\circ - \gamma_2$ te $\angle PYB = 90^\circ + \gamma_2$.

Primjenom sinusova poučka u trokutu XPA dobivamo

$$\frac{|AX|}{|AP|} = \frac{\angle XPA}{\angle AXP} = \frac{\sin(90^\circ - \phi)}{\sin(90^\circ - \gamma_1)} = \frac{\cos \phi}{\cos \gamma_1}, \quad 1 \text{ bod}$$

a primjenom sinusova poučka u trokutu CPA dobivamo

$$\frac{|AC|}{|AP|} = \frac{\angle CPA}{\angle ACP} = \frac{\sin \phi}{\sin \gamma_1}. \quad 1 \text{ bod}$$

Korištenjem gornjih jednakosti dobivamo

$$|AX| \cdot |AC| = |AP|^2 \frac{\sin \phi \cdot \cos \phi}{\sin \gamma_1 \cdot \cos \gamma_1}. \quad 1 \text{ bod}$$

Slično, korištenjem sinusova poučka u trokutu PYB dobivamo

$$\frac{|BY|}{|PB|} = \frac{\sphericalangle BPY}{\sphericalangle PYB} = \frac{\sin(90^\circ - \phi)}{\sin(90^\circ + \gamma_2)} = \frac{\cos \phi}{\cos \gamma_2}, \quad 1 \text{ bod}$$

a primjenom sinusova poučka u trokutu PBC dobivamo

$$\frac{|BC|}{|PB|} = \frac{\sphericalangle BPC}{\sphericalangle PCB} = \frac{\sin(180^\circ - \phi)}{\sin \gamma_2} = \frac{\sin \phi}{\sin \gamma_2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Korištenjem tih dviju jednakosti dobivamo

$$|BY| \cdot |BC| = |PB|^2 \frac{\sin \phi \cdot \cos \phi}{\sin \gamma_2 \cdot \cos \gamma_2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Iz uvjeta zadatka slijedi

$$|AP|^2 \frac{\sin \phi \cdot \cos \phi}{\sin \gamma_1 \cdot \cos \gamma_1} = |AX| \cdot |AC| = |BY| \cdot |BC| = |PB|^2 \frac{\sin \phi \cdot \cos \phi}{\sin \gamma_2 \cdot \cos \gamma_2},$$

Kako je P polovište stranice $\overline{AB}$, vrijedi $|AP| = |BP|$, pa dobivamo

$$\sin \gamma_1 \cos \gamma_1 = \sin \gamma_2 \cos \gamma_2. \quad 2 \text{ boda}$$

Korištenjem formule za sinus dvostrukog kuta ($\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, za sve $x \in \mathbb{R}$), nakon množenja gornje jednakosti s 2 dobivamo

$$\sin(2\gamma_1) = \sin(2\gamma_2).$$

Kutovi γ_1 i γ_2 manji su od 180° , pa su njihovi dvostruki kutovi manji od 360° . Zato da bi vrijedila gornja jednakost, mora biti $2\gamma_1 = 2\gamma_2$ ili $2\gamma_1 = 180^\circ - 2\gamma_2$. 1 bod

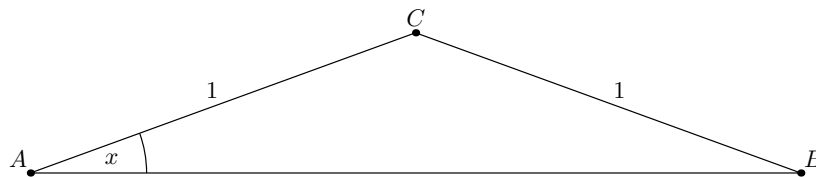
Ako je $2\gamma_1 = 2\gamma_2$, onda je $\gamma_1 = \gamma_2$, pa iz jednakosti s početka imamo

$$\frac{|AC|}{|AP|} = \frac{\sin \phi}{\sin \gamma_1} = \frac{\sin \phi}{\sin \gamma_2} = \frac{|BC|}{|BP|},$$

odakle je posebno $|AC| = |BC|$, pa trokut ABC nije raznostraničan i time dobivamo kontradikciju. 1 bod

Dakle, nužno je $2\gamma_1 = 180^\circ - 2\gamma_2$, odnosno $\sphericalangle BCA = \gamma_1 + \gamma_2 = 90^\circ$. Dakle, trokut ABC je pravokutan, što je i trebalo dokazati.

Napomena: U gornjem rješenju nakon jednakosti $\sin \gamma_1 \cos \gamma_1 = \sin \gamma_2 \cos \gamma_2$ se primjenjuje formula za sinus dvostrukog kuta: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Ta se formula može dokazati geometrijski.



Za jednakokraki trokut na slici iz kosinusova poučka slijedi

$$2|AB| \cos x = 2 \cdot |AC| \cdot |AB| \cos x = |AC|^2 + |AB|^2 - |BC|^2 = |AB|^2,$$

odnosno $|AB| = 2 \cos x$. S druge strane, primjenom sinusova poučka dobivamo

$$|AB| = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sin(180^\circ - 2x)}{\sin x} = \frac{\sin(2x)}{\sin x},$$

pa formula za dvostruki kut slijedi kada izjednačimo dva dobivene identiteta za duljinu stranice $|AB|$.

Učenici ne moraju dokazivati formulu za dvostruki kut.

Alternativno, rješenje se može dovršiti algebarski bez korištenja te formule. Kvadriranjem identiteta $\sin \gamma_1 \cos \gamma_1 = \sin \gamma_2 \cos \gamma_2$ i uvođenjem supstitucija $A = \sin^2 \gamma_1 = 1 - \cos^2 \gamma_1$, $B = \sin^2 \gamma_2 = 1 - \cos^2 \gamma_2$, jednakost postaje

$$A(1 - A) = B(1 - B), \quad \text{odnosno,} \quad (A - B)(A + B - 1) = 0.$$

Prva mogućnost daje $\sin^2 \gamma_1 = \sin^2 \gamma_2$. Kako su kutovi γ_1 i γ_2 između 0° i 180° , nužno je $\gamma_1 = \gamma_2$, što kao u prvom rješenju odbacujemo. Druga mogućnost daje

$$0 = \sin^2 \gamma_1 + \sin^2 \gamma_2 - 1 = \sin^2 \gamma_1 - \cos^2 \gamma_2 = \sin^2 \gamma_1 - \sin^2(90^\circ - \gamma_2),$$

što ponovno slično argumentiramo da je jedina mogućnost $\gamma_1 = 90^\circ - \gamma_2$, dakle da je kut pri vrhu C pravi.

Drugo rješenje.

Neka pravac paralelan sa BC kroz A siječe XY u točki Y' , a paralelu sa AB kroz C u točki B' .

Budući da je četverokut $BCB'A$ paralelogram, vrijedi $|BC| = |AB'|$.

Također, iz $AY' \parallel YB$ slijedi da je $\angle Y'AP = \angle PBY$. Kutovi $\angle Y'PA$ i $\angle YPB$ su kao vršni kutovi pri vrhu P jednaki, a kako je P polovište stranice AB vrijedi $|PB| = |PA|$. Zato po K-S-K poučku o sukladnosti zaključujemo da su trokuti $PY'A$ i PYB sukladni.

2 boda

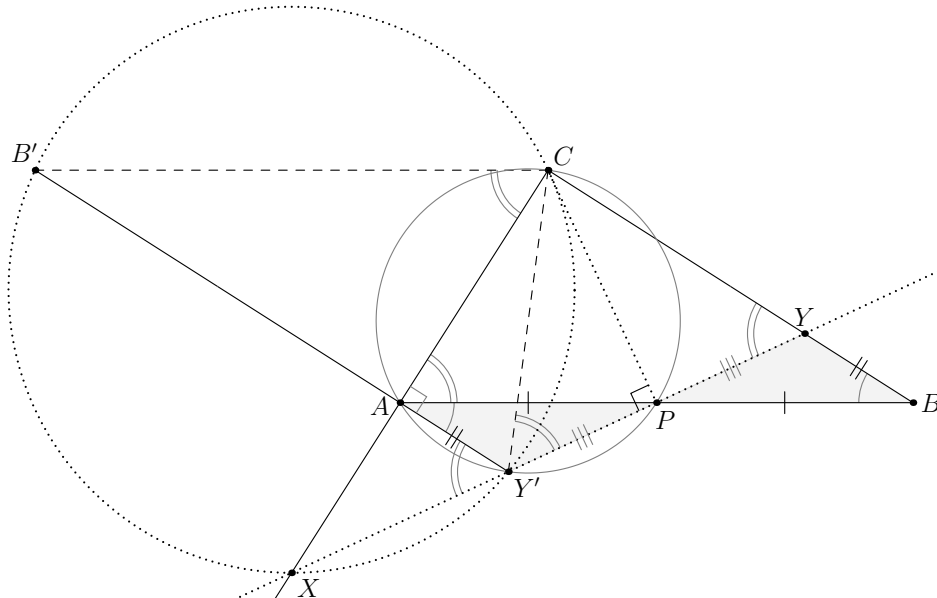
Posebno, iz te sukladnosti slijedi $|BY| = |AY'|$. Uvjet iz zadatka sada možemo zapisati na sljedeći način:

$$|AX| \cdot |AC| = |BY| \cdot |BC| = |AY'| \cdot |AB'|$$

1 bod

2 boda

1 bod


$$\sphericalangle CAP = \sphericalangle ACB' = \sphericalangle AY'X = \sphericalangle CYP = \sphericalangle CY'P, \quad 1 \text{ bod}$$

Zato je $\sphericalangle CAY' = 180^\circ - \sphericalangle CPY' = 90^\circ$, te konačno

$$\sphericalangle ACB = 180^\circ - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA) = 180^\circ - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle BAY') = 180^\circ - \sphericalangle CAY' = 90^\circ, \quad 1 \text{ bod}$$

čime smo dokazali da je trokut ABC pravokutan.

Zadatak A-2.5.

Dana je ploča dimenzija 10×10 . U gornjem lijevom polju ploče nalazi se muha. Muha se može kretati na dva načina – *korakom* i *letom*. Korak je pomak na polje neposredno ispod ili desno od polja na kojem se trenutno nalazi. Letom muha prelazi sa zadnjeg (krajnjeg desnog) polja na prvo (krajnje lijevo) polje u istom retku ili sa zadnjeg (donjeg) polja na prvo (gornje) polje u istom stupcu.

Koji je najmanji broj letova koje muha mora napraviti da bi posjetila svako polje ploče točno jednom?

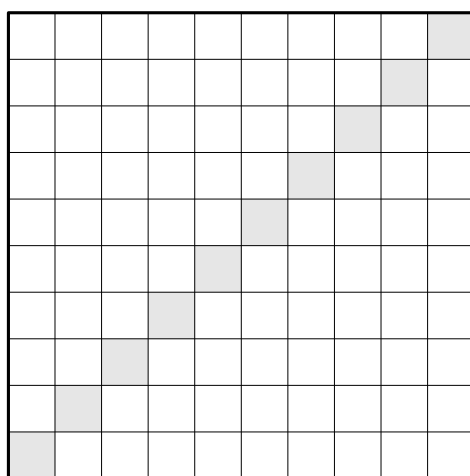
Prvo rješenje.

Odgovor je 9 letova.

1 bod

Proglasimo *crnim* polja ploče koja leže na dijagonali koja spaja polje u gornjem desnom kutu i polje u donjem lijevom kutu. Tih polja je ukupno 10.

2 boda



Primijetimo da muha ne može doći od jednog crnog polja ploče do drugog bez da između izvede barem jedan let. Naime, na kojem se god crnom polju ploče nalazi, polja ispod nje su joj nedostupna bez letova jer koracima ne može ići ulijevo, a crna polja iznad nje su joj nedostupna jer koracima ne može ići prema gore.

2 boda

Nakon što muha posjeti prvo crno polje, kako bi posjetila preostalih 9 polja mora izvesti još barem 9 letova. Dakle, ne postoji šetnja po svim poljima ploče s manje od 9 letova.

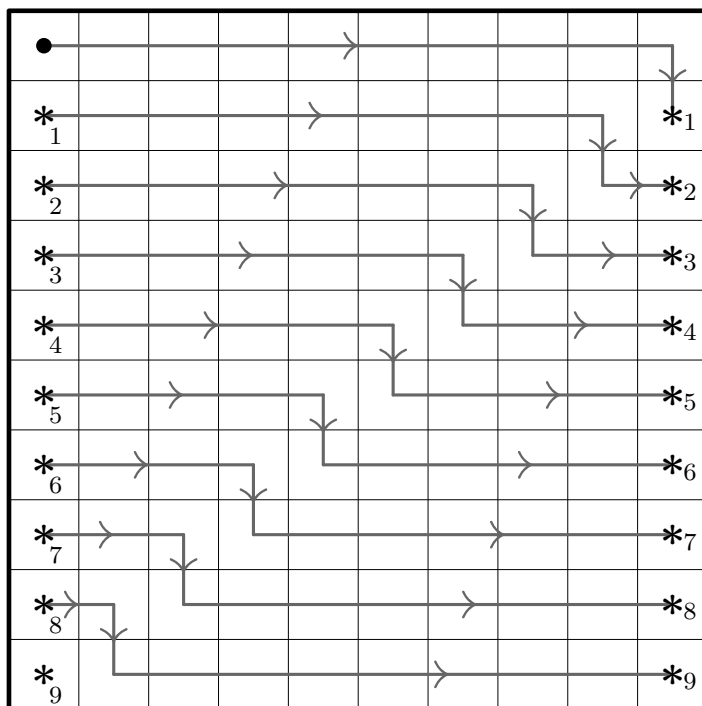
2 boda

Da 9 zaista jest najmanji broj letova, dokazujemo konstrukcijom jedne takve šetnje. Neka muha izmjenjuje 9 poteza (koraka ili letova) udesno, pa jedan potez prema dolje. Ako se u nekom trenutku nalazi na desnom rubu ploče kada treba napraviti potez udesno, tada će muha napraviti let na prvo polje tog retka. Neka to ponovi 10 puta, bez da deseti put napravi korak prema dolje.

2 boda

Nakon svakih 9 poteza udesno muha će posjetiti sva polja tog retka točno jednom. Jednim korakom prema dolje prvi put će posjetiti neko polje novog retka. Na taj način posjetit će sva polja točno jednom. Ukupan broj letova je zaista 9: izvest će let točno jednom u svakom retku osim prvom.

1 bod



Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, tvrdimo da je najmanji mogući broj letova jednak 9.

1 bod

Svakom polju ploče koje se nalazi u i -tom retku i j -tom stupcu ($i, j \in \{1, \dots, 10\}$) pridružimo vrijednost $i + j$.

2 boda

Primijetimo da svakim korakom muha posjećuje polje kojem je vrijednost veća za 1 od vrijednosti prošlog polja, a letom posjećuje polje kojem je vrijednost manja za 9.

1 bod

Neka je k broj letova koje je muha izvela u jednoj šetnji po svim poljima ploče. To znači da je $99 - k$ puta izvela korak i time uvećala vrijednost prethodno posjećenog polja za 1, a k puta smanjila tu vrijednost za 9.

1 bod

Budući da je muha krenula s polja vrijednosti 2, završila na polju kojem je vrijednost najviše 20, mora vrijediti

$$2 + (99 - k) \cdot 1 + k \cdot (-9) \leq 20,$$

1 bod

odnosno $81 \leq 10k$.

Najmanji prirodni k koji zadovoljava gornju nejednakost je 9, što znači da broj letova ne smije biti manji od 9.

1 bod

Šetnju s 9 letova konstruiramo kao u prvom rješenju.

3 boda

Napomena: Za konstrukciju šetnje s 9 letova, 2 boda vrijedi opis konstrukcije tih poteza, a 1 bod dokaz da se tom šetnjom posjete sva polja i uključuje 9 letova. Oba dijela rješenja mogu biti ostvarena grafičkim prikazom, ako je iz tog prikaza nedvosmisleno jasno o kojim potezima se radi, odnosno da je ta šetnja valjan primjer šetnje s 9 letova.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

14. ožujka 2025.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I Taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak A-3.1.

Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju

$$2 \cos^2 \left(\frac{x + 2y}{4} \right) = 2^x + 2^{-x}.$$

Rješenje.

Kako je

$$-1 \leq \cos \left(\frac{x + 2y}{4} \right) \leq 1, \quad 1 \text{ bod}$$

slijedi

$$0 \leq \cos^2 \left(\frac{x + 2y}{4} \right) \leq 1,$$

odnosno lijeva strana početne jednadžbe manja je ili jednaka 2. 1 bod

S druge strane, prema A–G nejednakosti vrijedi

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2. \quad 2 \text{ boda}$$

Kako bi se postigla jednakost u početnoj jednadžbi, obje strane jednakosti moraju biti jednake 2. 2 boda

Kako jednakost $2^x + 2^{-x} = 2$ vrijedi ako i samo ako je $2^x = 2^{-x}$, odakle slijedi $x = -x$, odnosno $x = 0$. 1 bod

Uvrštavanjem dobivamo $2 \cos^2 \left(\frac{2y}{4} \right) = 2$, odnosno $\cos^2 \left(\frac{y}{2} \right) = 1$. Slijedi

$$\frac{y}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{tj.} \quad y = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad 2 \text{ boda}$$

Prema tome, rješenja zadane jednadžbe su $(x, y) = (0, 2k\pi)$, pri čemu je $k \in \mathbb{Z}$. 1 bod

Zadatak A-3.2.

Odredi najmanju vrijednost koju može poprimiti izraz

$$|8 \cdot 5^m - n^2|,$$

pri čemu su m i n prirodni brojevi.

Rješenje.

Traženi izraz može biti jednak 4 za $m = 1$ i $n = 6$.

1 bod

Pretpostavimo da izraz može poprimiti neku manju vrijednost, odnosno da broj $A := 8 \cdot 5^m - n^2$ može poprimiti neku od sljedećih vrijednosti: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Kada bi bilo $A = 0$, tada bi moralo vrijediti $n^2 = 8 \cdot 5^n$, no potpun kvadrat ne može biti djeljiv s 8, a ne sa 16.

Promotrimo sada ostatke pri dijeljenju s 4. Kako je broj $8 \cdot 5^n$ djeljiv s 4, dok potpun kvadrat daje ostatke 0 ili 1, zaključujemo da broj A može dati ostatak 0 ili 3 pri dijeljenju s 4. Dakle, da bi $|A|$ imalo vrijednost manju od 4, moguće je samo da je $A = -1$ ili $A = 3$.

2 boda

Slično, promotrimo ostatke koje A daje pri dijeljenju s 5. Izraz $8 \cdot 5^n$ djeljiv je s 5, dok potpun kvadrat daje ostatak 0, 1 ili 4. Zato zaključujemo da je nemoguće da je $A = 3$.

1 bod

Preostalo je dokazati da ne postoje m i n takvi da je $A = -1$, odnosno da jednadžba

$$8 \cdot 5^m - n^2 = -1$$

nema rješenja.

Prebacujući n^2 na drugu stranu i primjenom razlike kvadrata, dobivamo

$$8 \cdot 5^m = (n - 1)(n + 1).$$

1 bod

Promotrimo faktore s desne strane. Najviše jedan od ta dva faktora može biti djeljiv s 5, jer bi u suprotnom i njihova razlika $(n + 1) - (n - 1) = 2$ trebala biti djeljiva s 5, što nije istina.

1 bod

Nadalje, kako je lijeva strana parna, mora biti i desna, što je moguće kada je n neparan broj. Tada su faktori na desnoj strani dva uzastopna parna broja, pa jedan mora biti djeljiv s 2, a drugi s 4.

1 bod

Zaključujemo da su ti faktori $(n - 1)$ i $(n + 1)$ jednaki 2 i $4 \cdot 5^m$ ili 4 i $2 \cdot 5^m$.

1 bod

Također, faktor $n - 1$ mora biti jednak manjem od mogućih faktora jer je manji od $n + 1$. Zato je preostalo provjeriti dvije mogućnosti: $n - 1 = 2$, $n + 1 = 4 \cdot 5^m$, te $n - 1 = 4$, $n + 1 = 2 \cdot 5^m$.

1 bod

U prvoj mogućnosti imamo $n = 3$, odnosno $4 = 4 \cdot 5^m$ što nema prirodnih rješenja. U drugoj imamo $n = 5$ i $6 = 2 \cdot 5^m$, što također nema prirodnih rješenja.

1 bod

Time smo provjerili sve mogućnosti, te zaista dokazali da je najmanja vrijednost za izraz $|8 \cdot 5^m - n^2|$ jednaka 4.

Napomena: Umjesto promatranja izraza A modulo 4 i modulo 5, sve opcije osim $A = 0$ i $A = -1$ moguće je odjednom odbaciti i gledanjem ostataka pri dijeljenju s 8.

Jednadžba $8 \cdot 5^m = (n - 1)(n + 1)$ se može riješiti manjom analizom kako moraju izgledati faktori $(n - 1)$ i $(n + 1)$, ali provjeravanjem većeg broja slučajeva. U takvim rješenjima zadnjih 5 bodova pridjeljuje se za te uspješno analizirane slučajeve koji odgovaraju zaključcima iz gornjeg rješenja.

Tvrdnja $A \neq 0$ ne nosi bodove, no rješenja kojima taj argument nedostaje gube 1 bod.

Zadatak A-3.3.

Dokaži da za svaki prirodan broj n djeljiv s 4 vrijedi

$$\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin^2\left(2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin^2\left((n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + \sin^2\left(n \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}.$$

Rješenje.

Označimo $n = 4m$, gdje je m prirodan broj. Tražena suma S je sada zbroj pribrojnika oblika $\sin^2\left(k \cdot \frac{\pi}{2m}\right)$, gdje je k iz skupa $\{1, 2, \dots, 4m\}$.

Za k za koji vrijedi $1 \leq k \leq m-1$ promotrimo k -ti i $(m-k)$ -ti pribrojnik. Za njihov zbroj vrijedi

$$\begin{aligned} \sin^2\left(k \cdot \frac{\pi}{2m}\right) + \sin^2\left((m-k) \cdot \frac{\pi}{2m}\right) &= \sin^2\left(k \cdot \frac{\pi}{2m}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - k \cdot \frac{\pi}{2m}\right) \\ &= \sin^2\left(k \cdot \frac{\pi}{2m}\right) + \cos^2\left(k \cdot \frac{\pi}{2m}\right) = 1. \end{aligned} \quad 4 \text{ boda}$$

To znači da u sumi

$$S_1 := \sin^2\left(1 \cdot \frac{\pi}{2m}\right) + \cdots + \sin^2\left((m-1) \cdot \frac{\pi}{2m}\right)$$

možemo upariti prvi i zadnji pribrojnik, drugi i predzadnji, itd. Zaključujemo da vrijedi

$$S_1 = \frac{m-1}{2} \quad 2 \text{ boda}$$

(ako ih je neparno mnogo, za srednji član zbroja vrijedi $\sin^2\left(\frac{m}{2} \cdot \frac{\pi}{2m}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, pa i dalje vrijedi isti identitet).

Na sličan način uparujemo prvi i zadnji pribrojnik, drugi i predzadnji, itd., u sumama

$$\begin{aligned} S_2 &:= \sin^2\left(m \cdot \frac{\pi}{2m}\right) + \cdots + \sin^2\left(2m \cdot \frac{\pi}{2m}\right), \\ S_3 &:= \sin^2\left((2m+1) \cdot \frac{\pi}{2m}\right) + \cdots + \sin^2\left((3m-1) \cdot \frac{\pi}{2m}\right), \\ S_4 &:= \sin^2\left(3m \cdot \frac{\pi}{2m}\right) + \cdots + \sin^2\left(4m \cdot \frac{\pi}{2m}\right) \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

(zbroj argumenata uparenih izraza je redom $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ i $\frac{7\pi}{2}$, pa ih zato možemo analogno upariti). Dobivamo da vrijedi

$$S_2 = \frac{m+1}{2}, \quad S_3 = \frac{m-1}{2}, \quad S_4 = \frac{m+1}{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Zaključujemo da je tražena suma jednaka

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{m-1}{2} + \frac{m+1}{2} + \frac{m-1}{2} + \frac{m+1}{2} = 2m = \frac{n}{2}, \quad 1 \text{ bod}$$

što je i trebalo dokazati.

Napomena: Uparivanje pribrojnika iz gornjeg rješenja nije jedino moguće uparivanje.

Koristeći identitete $\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(-x)$, izraz iz zadatka moguće je zapisati kao zbroj $2m$ ili m pribrojnika prije nego se izračuna vrijednost zbroja nekih m pribrojnika. Rješenja koja to ostvare zaslužuju **2 boda** za zapis izraza pomoću $2m$ pribrojnika, odnosno **4 boda** za zapis izraza pomoću m pribrojnika (i tome odgovaraju bodovi s kraja gornje bodovne sheme).

Umjesto identiteta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, prvi dio rješenja može se izvesti i koristeći formulu za polovični kut

$$\sin^2 \left(k \cdot \frac{\pi}{2m} \right) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{m} \right) \right]$$

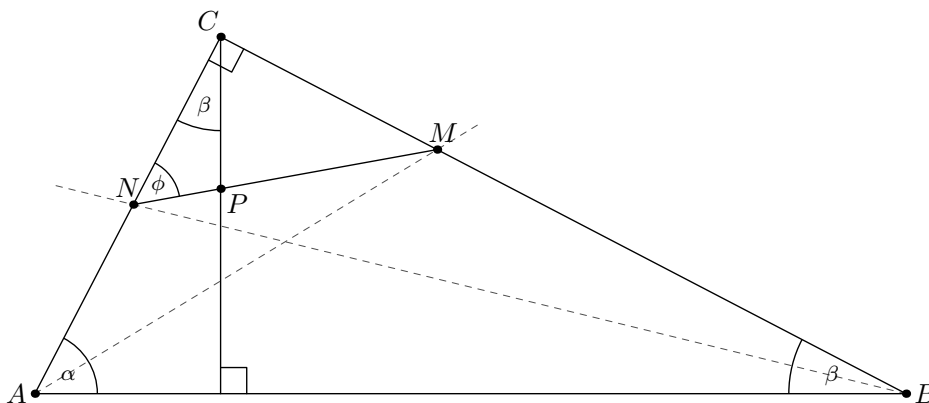
i potom uparivanjem izraza čiji kosinusi su suprotni brojevi. Korištenje gornje formule vrednuje se s **2 boda**, a povoljno uparivanje takvih izraza dodatna **2 boda**; ti bodovi odgovaraju prvih **4 boda** gornje bodovne sheme.

Zadatak A-3.4.

Neka je ABC trokut s pravim kutom u vrhu C . Simetrale šiljastih kutova sijeku nasuprotne stranice u točkama M i N . Neka je P sjecište visine iz vrha C s dužinom $\overline{MN}$. Dokaži da je duljina $|CP|$ jednaka polumjeru upisane kružnice trokuta ABC .

Prvo rješenje.

Neka je M sjecište simetrale iz kuta A i stranice $\overline{BC}$, a N sjecište simetrale iz kuta B i stranice $\overline{AC}$. Označimo s a , b i c duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$, redom, te neka su α i β mjere kutova trokuta ABC pri vrhovima A i B redom. Kutovi $\sphericalangle NCP$ i $\sphericalangle ABC$ kutovi su s okomitim kracima, pa je zato $\sphericalangle NCP = \sphericalangle ABC = \beta$.



Koristeći formule za površinu trokuta

$$P = rs = r \cdot \frac{a + b + c}{2} \quad \text{i} \quad P = \frac{ab}{2}$$

zaključujemo da vrijedi

$$r = \frac{ab}{a + b + c}.$$

1 bod

Zato je dovoljno dokazati da je $|CP| = \frac{ab}{a + b + c}$.

Simetrala kuta dijeli nasuprotnu dužinu u omjeru odgovarajućih stranica. Primjenom na simetralu kuta A dobivamo $\frac{|BM|}{|MC|} = \frac{c}{b}$, odakle je

$$\frac{a}{|MC|} = \frac{|BC|}{|MC|} = \frac{|BM| + |MC|}{|MC|} = \frac{|BM|}{|MC|} + 1 = \frac{c}{b} + 1 = \frac{b+c}{b},$$

odnosno

$$|MC| = \frac{ab}{b+c}. \quad 1 \text{ bod}$$

Analogno $|NC| = \frac{ab}{a+c}. \quad 1 \text{ bod}$

Označimo s ϕ mjeru kuta $\sphericalangle CNP$. Iz trokuta CNP zaključujemo da je $\sphericalangle CPN = 180^\circ - \beta - \phi$. Primjenom sinusova poučka u tom trokutu zaključujemo

$$\begin{aligned} \frac{|CN|}{|CP|} &= \frac{\sin(180^\circ - \beta - \phi)}{\sin \phi} = \frac{\sin(\beta + \phi)}{\sin \phi} & 1 \text{ bod} \\ &= \frac{\sin \phi \cos \beta + \cos \phi \sin \beta}{\sin \phi} \\ &= \cos \beta + \operatorname{ctg} \phi \sin \beta. & 3 \text{ boda} \end{aligned}$$

Sve izraze s desne strane gornje jednakosti možemo izraziti pomoću duljina stranica trokuta. Iz pravokutnog trokuta ABC znamo da je

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \quad \text{i} \quad \cos \beta = \frac{a}{c}, \quad 1 \text{ bod}$$

a iz pravokutnog trokuta CNM dobivamo

$$\operatorname{ctg} \phi = \frac{|CN|}{|CM|} = \frac{b+c}{a+c}. \quad 1 \text{ bod}$$

Uvrštavanjem u gore dobivenu jednakost slijedi

$$\begin{aligned} \frac{|CN|}{|CP|} &= \cos x + \operatorname{ctg} y \sin x = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \cdot \frac{b+c}{a+c} = \\ &= \frac{a^2 + ac + b^2 + bc}{c(a+c)} = \frac{c^2 + ac + bc}{c(a+c)} = \frac{a+b+c}{a+c}, \end{aligned}$$

odnosno

$$|CP| = |CN| \cdot \frac{a+c}{a+b+c} = \frac{ab}{a+c} \cdot \frac{a+c}{a+b+c} = \frac{ab}{a+b+c}, \quad 1 \text{ bod}$$

što je i trebali dokazati.

Drugo rješenje.

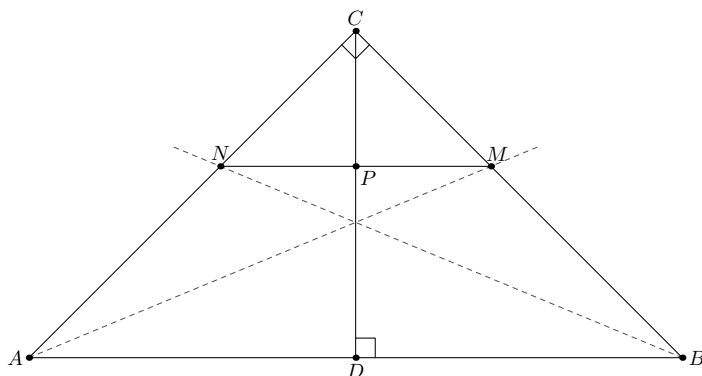
Koristimo oznake kao u prošlom rješenju, te želimo dokazati da je

$$|CP| = \frac{ab}{a+b+c}.$$

1 bod

Dodatno, označimo s D nožište visine iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$.

Pretpostavimo prvo da je trokut ABC jednakokračan: $a = b$ i $c = a\sqrt{2}$.



U tom slučaju je pravac MN paralelan s pravcem AB . Korištenjem svojstva simetrale kuta (dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru susjednih stranica) i Talesovom teorem dobivamo

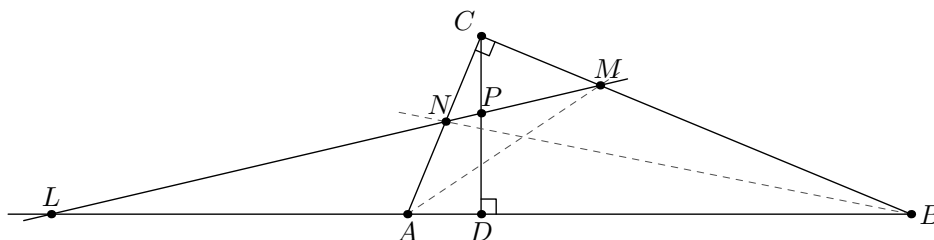
$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AN|}{|NC|} = \frac{|PD|}{|CP|}.$$

Dodajući 1 na svaku stranu jednadžbe, dobivamo $\frac{c+a}{a} = \frac{|CD|}{|CP|}$. U jednakokračnom pravokutnom trokutu ABC dužina $\overline{CD}$ je i polumjer trokutu opisane kružnice, a hipotenuza promjer te kružnice, pa je

$$|CP| = \frac{a}{a+c}|CD| = \frac{a}{a+c} \cdot \frac{c}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a(1+\sqrt{2})} = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{ab}{a+b+c},$$

čime je tvrdnja u tom slučaju dokazana.

Ako trokut ABC nije jednakokračan tada pravac MN nije paralelan s AB , pa možemo definirati točku L kao presjek pravaca MN i AB . Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $|AC| < |BC|$, pa se A nalazi između B i L .



Primjenom Menelajevog teorema na trokut ABC i pravac MN dobivamo

$$\frac{|AL|}{|LB|} \cdot \frac{|BM|}{|MC|} \cdot \frac{|CN|}{|NA|} = 1$$

2 boda

odakle slijedi

$$\frac{|AL|}{|AL|+c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1$$

te sređivanjem ovog izraza dobivamo

$$|AL| = \frac{bc}{a-b}. \quad 1 \text{ bod}$$

Primjenom Menelajevog teorema na trokut ADC i pravac LN dobivamo

$$\frac{|CN|}{|NA|} \cdot \frac{|AL|}{|LD|} \cdot \frac{|PD|}{|CP|} = 1. \quad 3 \text{ boda}$$

Duljinu visine $|CD|$ trokuta ABC računamo koristeći formulu za površinu trokuta, a duljinu $|AD|$ iz pravokutnog trokuta ACD . Dobivamo

$$|CD| = \frac{ab}{c}, \quad |AD| = \sqrt{|AC|^2 - |CD|^2} = \frac{b^2}{c}. \quad 1 \text{ bod}$$

Uvrštavanjem u gore dobiveni identitet i ponovno koristeći da simetrala dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru susjednih stranica, dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{|CD| - |CP|}{|CP|} &= \frac{|PD|}{|CP|} = \frac{|NA|}{|CN|} \cdot \frac{|LD|}{|AL|} = \frac{|AB|}{|CB|} \cdot \frac{|AL| + |AD|}{|AL|} \\ &= \frac{c}{a} \cdot \frac{\frac{bc}{a-b} + \frac{b^2}{c}}{\frac{bc}{a-b}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{c^2 + ab - b^2}{c^2} \\ &= \frac{a^2 + ab}{ac} = \frac{a+b}{c}. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Odavde je

$$\frac{|CD|}{|CP|} = \frac{a+b+c}{c},$$

odnosno

$$|CP| = \frac{c}{a+b+c} \cdot \frac{ab}{c} = \frac{ab}{a+b+c}, \quad 1 \text{ bod}$$

što je i trebalo dokazati.

Napomena: Dokaz tvrdnje zadatka u slučaju kada je ABC jednakokračan pravokutan trokut sam po sebi ne nosi bodove, međutim potpuna rješenja koja uvode točku L kao u prethodnom rješenju, a ne komentiraju slučaj kada je MN paralelno s AB , gube 1 bod.

Zadatak A-3.5.

U ravnini je dano osam točaka koje su vrhovi pravilnoga osmerokuta. Svake dvije točke spojene su dužinom. U svakome potezu odabiru se tri točke te se brišu tri dužine kojima su te točke krajnje. Koliki je najmanji mogući broj preostalih dužina u trenutku kad nije više moguće napraviti takav potez?

Rješenje.

Najmanji broj preostalih dužina je 4.

1 bod

Promotrimo dužine koje izlaze iz nekog fiksnog vrha. Taj vrh krajnja je točka 7 dužina. U svakom potezu u kojem je taj vrh odabran uklanjamo dvije dužine kojima je on krajnja točka. Stoga za svaki vrh vrijedi da će broj preostalih dužina kojima je taj vrh krajnja točka biti neparan.

4 boda

U trenutku kada više nije moguće napraviti potez, svaki će vrh biti krajnja točka barem jedne dužine. To je moguće samo ako na kraju ostanu barem 4 dužine.

2 boda

Preostaje dokazati da je moguće odabrati 8 poteza tako da na kraju ostanu točno 4 dužine. Naime, nakon 8 poteza obrisat ćemo $3 \cdot 8 = 24$ dužine, pa će na kraju preostati točno $\frac{7 \cdot 8}{2} - 24 = 28 - 24 = 4$ dužine.

Označimo vrhove osmerokuta s $A_1, A_2, \dots, A_8$. U k -tom potezu odabiremo trokut $A_k A_{k+1} A_{k+3}$ za $k = 1, 2, \dots, 8$, pri čemu indekse promatramo modulo 8.

2 boda

Vrhu A_k u k -tom potezu obrisali smo dužine kojima je povezan s A_{k+1} i A_{k+3} , u $(k-1)$ -tom potezu obrisali smo dužine kojima je povezan s A_{k-1} i A_{k+2} , a u $(k-3)$ -tom potezu obrisali smo dužine kojima je povezan s A_{k-2} i A_{k-3} . To su sve različite dužine, pa je ovaj niz poteza dopušten, te ovim nizom poteza na kraju zaista preostaju 4 dužine.

1 bod

Napomena: Za konstrukciju 8 poteza s kojim ostaju na kraju točno 4 dužine, 2 boda vrijedi opis konstrukcije tih poteza, a 1 bod dokaz da je taj niz poteza dopušten. Oba dijela rješenja mogu biti ostvarena grafičkim prikazom, ako je iz tog prikaza nedvosmisleno jasno o kojim potezima se radi, odnosno da nikoja dva poteza ne koriste istu dužinu.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

14. ožujka 2025.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I Taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak A-4.1.

Dani su aritmetički niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i geometrijski niz $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takvi da su im svi članovi pozitivni realni brojevi i da vrijedi

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \text{ i } \quad a_{10} = b_3.$$

Dokaži da se svaki član niza $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pojavljuje u nizu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Prvo rješenje.

Kako je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aritmetički niz, postoje brojevi a, d takvi da je $a_n = a + (n - 1)d$. Također, kako je $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geometrijski niz, postoje brojevi b, q takvi da je $b_n = bq^{n-1}$. Iz $a_1 = b_1$ zaključujemo $a = b$.

Kako su b_1, b_2 i b_3 uzastopni članovi geometrijskog niza, vrijedi $b_1 b_3 = b_2^2$. Korištenjem uvjeta zadatka dobivamo

$$a(a + 9d) = (a + d)^2 \quad 3 \text{ boda}$$

$$a^2 + 9ad = a^2 + 2ad + d^2$$

$$d(7a - d) = 0. \quad 1 \text{ bod}$$

Ako je $d = 0$, tada je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstantan. U tom slučaju bismo imali

$$b = b_1 = a_1 = a_2 = b_2 = bq,$$

odakle je $b = 0$ ili $q = 1$. U prvom slučaju članovi niza ne bi bili pozitivni, a u drugom slučaju je i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstantan i jednak članovima niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pa je tvrdnja zadatka zadovoljena. 1 bod

Inače imamo $d = 7a$, pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_n = a + (n - 1)d = a + 7(n - 1)a. \quad 2 \text{ boda}$$

Iz uvjeta $a_2 = b_2$ i korištenjem $a = b$ slijedi $8a = aq$.

Ako je $a = 0$, članovi niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne bi bili pozitivni. Zaključujemo da je nužno $q = 8$, odnosno članovi niza $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dani su s $b_n = a \cdot 8^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. 2 boda

Brojevi oblika 8^{n-1} za sve $n \in \mathbb{N}$ daju ostatak 1 pri dijeljenju sa 7. Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $8^{n-1} = 7k + 1$. Posebno, to znači da je

$$b_n = a \cdot 8^{n-1} = a(7k + 1) = a_{k+1},$$

čime smo dokazali da se zaista svaki element niza $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pojavljuje u nizu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prošlom rješenju, neka su a , d , b i q takvi da je $a_n = a + (n - 1)d$ i $b_n = bq^{n-1}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz $a_1 = b_1$ zaključujemo $a = b$.

Nadalje, iz preostala dva uvjeta zadatka dobivamo

$$\begin{aligned} a + d &= aq, \\ a + 9d &= aq^2. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Iz prve jednakosti dobivamo $d = a(q - 1)$. Kad to uvrstimo u drugu jednakost dobivamo

$$a + 9a(q - 1) = aq^2. \quad 3 \text{ boda}$$

Slučaj $a = 0$ odbacujemo jer članovi niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne bi bili pozitivni. Dobivamo kvadratnu jednadžbu po q

$$q^2 - 9q + 8 = 0$$

kojoj su rješenja $q = 1$ i $q = 8$. 1 bod

Ako je $q = 1$, svi brojevi b_n jednaki su $a = a_1$, pa je tvrdnja zadatka zadovoljena. 1 bod

Ako je $q = 8$, dobivamo je $d = 7a$. 1 bod

Stoga je

$$a_n = a + 7(n - 1)a \text{ i } b_n = 8^{n-1}a \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}. \quad 2 \text{ boda}$$

Kao u prošlom rješenju, zaključujemo da se svi brojevi oblika $8^{n-1}a$ nalaze u nizu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. 1 bod

Napomena: Za svaki $n \in \mathbb{N}$ moguće je i eksplicitno naći indeks m takav da je $b_n = a_m$, ali to nije potrebno raditi u rješenju. Taj indeks je $m = \frac{8^{n-1} - 1}{7}$.

Zadatak A-4.2.

Za koje realne brojeve a sustav

$$\begin{cases} (1 + i) \cdot z + (1 - i) \cdot \bar{z} = 2a \\ |z + 1 - i| = \sqrt{2} \end{cases}$$

ima točno jedno rješenje u skupu kompleksnih brojeva?

Prvo rješenje.

Korištenjem zapisa $z = x + yi$, prva jednadžba postaje

$$(1 + i) \cdot (x + yi) + (1 - i) \cdot (x - yi) = 2a \quad 1 \text{ bod}$$

$$x + xi + yi - y + x - xi - yi - y = 2a$$

$$2x - 2y = 2a$$

$$y = x - a. \quad 2 \text{ boda}$$

Kvadriranjem druge jednadžbe sustava i uvrštavanjem y preko x i a , dobivamo ekvivalentan niz jednakosti

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + (y+1)^2 &= 2 && 1 \text{ bod} \\(x+1)^2 + (x-a+1)^2 &= 2 \\x^2 + 2x + 1 + x^2 + a^2 + 1 - 2ax - 2a + 2x &= 2 \\2x^2 - 2xa + a^2 + 2a &= 0. && 2 \text{ boda}\end{aligned}$$

Dobivena jednadžba je kvadratna po x s parametrom a . Početni sustav imat će jedno rješenje ako i samo ako i ova jednadžba ima jedno rješenje, a to je u slučaju kada je diskriminanta te kvadratne jednadžbe jednaka nuli:

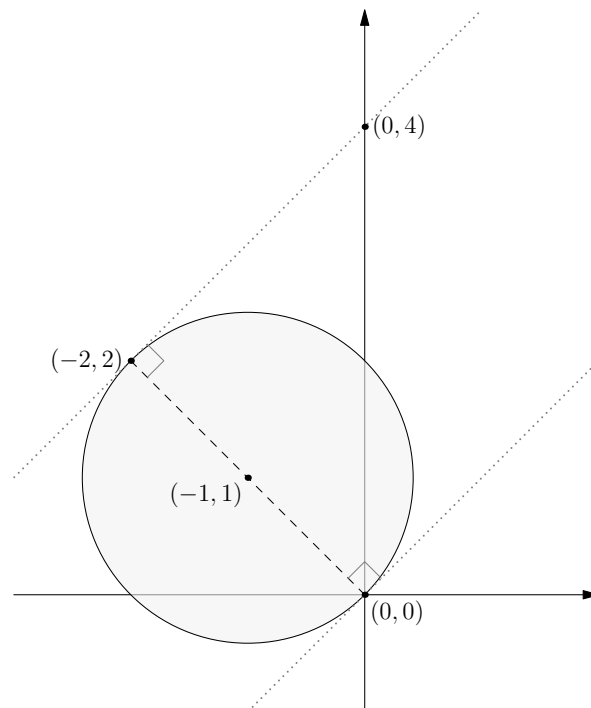
$$\begin{aligned}0 = D &= (-2a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a^2 + 2a) \\&= 4a^2 - 8a^2 - 16a \\&= -4a^2 - 16a && 1 \text{ bod} \\&= -4a(a+4).\end{aligned}$$

Zaključujemo da su tražene vrijednosti parametara $a = 0$ i $a = -4$. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju koristimo zapis $x + yi$ te zaključujemo da je prva jednadžba ekvivalentna s $y = x - a$. 3 boda

Promotrimo dobivene uvjete u Gaussovoj ravnini. Točke koje zadovoljavaju jednadžbu $y = x - a$ leže na nekom pravcu paralelnom s $y = x$. Druga jednadžba sustava predstavlja kružnicu sa središtem u $z_0 = -1 + i$, odnosno točki $(-1, 0)$ i radijusom $\sqrt{2}$. 1 bod



Početni sustav imat će točno jedno rješenje ako i samo ako opisani pravac i kružnica imaju točno jednu zajedničku točku. To je moguće samo ako je pravac tangenta na kružnicu.

2 boda

Točke dirališta pravaca paralelnih s $y = x$ leže na promjeru kružnice koji je okomit na taj pravac. Koeficijent smjera mu je jednak -1 te prolazi kroz središte $(-1, 1)$, pa je zato jednadžba pravca na kojem leži taj promjer $y - 1 = -1(x + 1)$, odnosno $y = -x$.

1 bod

Točke $(0, 0)$ (tj. $w_1 = 0 + 0i = 0$) i $(-2, 2)$ ($w_2 = -2 + 2i$) očito leže na pravcu $y = -x$. Međutim, leže i na danoj kružnici, što vidimo direktnom provjerom:

$$\begin{aligned} |w_1 + 1 - i| &= |1 - i| = \sqrt{2}, \\ |w_2 + 1 - i| &= |-1 + i| = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

2 boda

Dakle, to su krajnje točke promjera okomitog na pravce oblika $y = x - a$, pa su to tražene točke dirališta.

Sada vrijednosti za a dobivamo uzimanjem u obzir uvjeta da te točke leže na pravcu $y = x - a$. U slučaju točke $(0, 0)$ dobivamo $0 = 0 - a$, odnosno $a = 0$. U slučaju točke $(-2, 2)$ dobivamo $2 = -2 - a$, odnosno $a = -4$.

1 bod

Zaključujemo da su tražene vrijednosti parametara $a = 0$ i $a = -4$.

Zadatak A-4.3.

Odredi sve uređene parove prirodnih brojeva (m, n) za koje vrijedi

$$n \cdot 2^m + m = m \cdot 2^n + n.$$

Prvo rješenje.

Jednadžbu zapišimo u obliku

$$\frac{2^n - 1}{n} = \frac{2^m - 1}{m}.$$

1 bod

Definirajmo niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dan s $a_n = \frac{2^n - 1}{n}$ i pokažimo da je ovaj niz strogo rastući.

2 boda

Budući da vrijedi

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{2^n - 1}{n} \\ &= \frac{n(2^{n+1} - 1) - (n+1)(2^n - 1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{(n-1)2^n + 1}{n(n+1)} > 0, \end{aligned}$$

2 boda

4 boda

zaključujemo da je svaki sljedeći član niza veći od prethodnog, pa je onda niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaista rastući.

Stoga, da bi vrijedila početna jednadžba, jedino je moguće da vrijedi $m = n$. Očito su svi parovi (n, n) za $n \in \mathbb{N}$ zaista rješenja početne jednadžbe.

1 bod

Drugo rješenje.

Jednadžbu zapišimo u obliku

$$n(2^m - 1) = m(2^n - 1).$$

Neka je d najveći zajednički djelitelj brojeva m i n . Tada postoje relativno prosti brojevi a i b takvi da je $n = da$ i $m = db$ za relativno proste brojeve a i b . Uvrštavanjem tih jednakosti u početnu jednadžbu i dijeljenjem s d dobivamo

$$a(2^{db} - 1) = b(2^{da} - 1). \quad 1 \text{ bod}$$

Iz dobivene jednakosti zaključujemo $2^{da} - 1 \mid a(2^d - 1)$, odakle posebno mora vrijediti

$$2^{da} - 1 \leq a(2^d - 1). \quad 2 \text{ boda}$$

Za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi nejednakost $2^k \geq k + 1$. 2 boda

(Naime, za $k = 0$ vrijedi jednakost, dok za $k \geq 1$ znamo da je broj svih podskupova k -članog skupa veći ili jednak broju podskupova s 0 ili 1 elementom).

Koristeći tu tvrdnju i dobivenu nejednakost imamo

$$a(2^d - 1) \geq 2^{da} - 1 = (2^d) \cdot (2^d)^{a-1} - 1 \geq (2^d) \cdot 2^{a-1} - 1 \geq 2^d \cdot a - 1. \quad 3 \text{ boda}$$

Uspoređujući prvi i zadnji izraz, dobivamo da je $a \leq 1$, odnosno $a = 1$. 1 bod

Analogno se pokazuje $b = 1$, odakle zaključujemo da je nužno $m = n$. Očito su svi parovi (n, n) za $n \in \mathbb{N}$ zaista rješenja početne jednadžbe. 1 bod

Napomena: Nejednakost $2^k \geq k + 1$ može se dokazati i korištenjem principa matematičke indukcije. Međutim, za potpuni broj bodova na ovom zadatku tu tvrdnju nije nužno dokazivati.

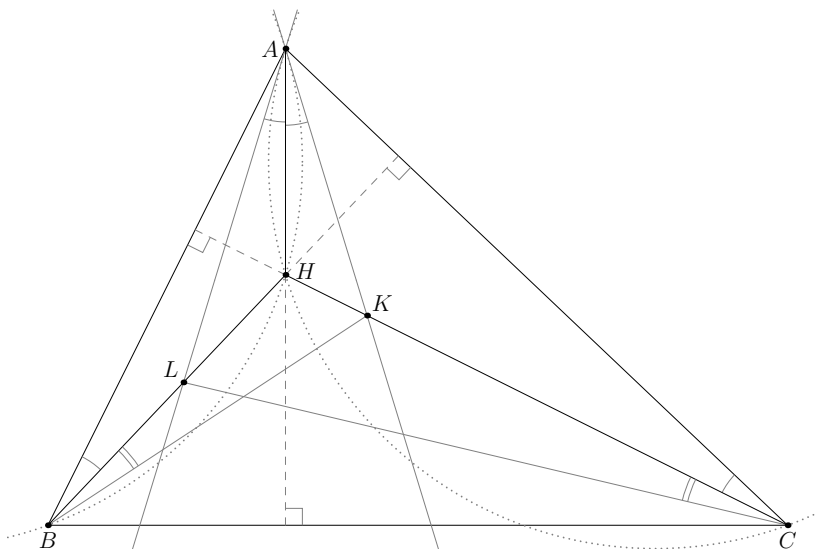
Zadatak A-4.4.

Dan je šiljastokutan trokut ABC s ortocentrom H . Tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABH u točki A siječe pravac CH u točki K , a tangenta na opisanu kružnicu trokuta AHC u točki A siječe pravac BH u točki L . Dokaži da točke B, C, K i L pripadaju istoj kružnici.

Rješenje.

Prema teoremu o kutu između tetive i tangente redom vrijedi $\sphericalangle HAK = \sphericalangle HBA$ i $\sphericalangle LAH = \sphericalangle ACH$.

2 boda



Nadalje, kako je H ortocentar trokuta ABC slijedi da je CH okomito na AB i BH okomito na AC . Prema tome imamo da je $\sphericalangle HBA = 90^\circ - \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACH$.

1 bod

Iz gornjih jednakosti slijedi da je $\sphericalangle HAK = \sphericalangle ACH$ pa zaključujemo da su trokuti HKA i HAC slični po K-K poučku o sličnosti.

1 bod

Iz gornje sličnosti imamo da je $|HC| \cdot |HK| = |AH|^2$.

1 bod

Analogno su trokuti LHA i AHB slični te vrijedi $|HB| \cdot |HL| = |AH|^2$.

1 bod

Spajanjem gornjih jednakosti dobivamo $|HB| \cdot |HL| = |HC| \cdot |HK|$.

2 boda

Iz prethodne jednakosti slijedi da je $\frac{|HL|}{|HC|} = \frac{|HK|}{|HB|}$ pa prema S-K-S poučku o sličnosti zaključujemo da su trokuti HLC i HKB slični.

1 bod

Stoga je

$$\sphericalangle KCL = \sphericalangle HCL = \sphericalangle KBH = \sphericalangle KBL$$

iz čega slijedi da je četverokut $BKCL$ tetivan.

1 bod

Napomena: Nakon što se dobije jednakost $|HB| \cdot |HL| = |HC| \cdot |HK|$, dokazati da je četverokut $BKCL$ tetivan može se i korištenjem potencije točke.

Zadatak A-4.5.

Za neparni prirodan broj $n > 1$ na ploči su napisani brojevi $n, n + 1, \dots, 2n - 1$. Dokaži da se s ploče može izbrisati jedan broj tako da zbroj preostalih brojeva na ploči ne bude djeljiv nijednim od preostalih brojeva na ploči.

Rješenje.

Pretpostavimo suprotno. Tada uklanjanjem broja k s ploče postoji neki broj s ploče $x_k \neq k$ takav da dijeli zbroj preostalih brojeva, za svaki $k = n, n + 1, \dots, 2n - 1$.

Neka je $S = n + \dots + (2n - 1)$. Dakle, vrijedi

$$x_k \mid S - k. \quad 1 \text{ bod}$$

Primijetimo da ni za koja dva različita broja s ploče k i l ne smije vrijediti $x_k = x_l$. U suprotnom bismo imali da su brojevi $S - k$ i $S - l$ djeljivi s $x_k = x_l$, pa je njime djeljiva i razlika $|k - l|$. Međutim, kako su svi brojevi s ploče između n i $2n - 1$, vrijedi

$$n \leq x_k \leq |k - l| \leq |(2n - 1) - n| = n - 1,$$

odakle dobivamo kontradikciju. 3 boda

Posebno, postoji broj m na ploči takav da je $x_m = n$. U suprotnom bi n brojeva $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n-1}$ moglo poprimiti najviše $n - 1$ moguću vrijednost, pa bi nužno među njima postojala dva jednaka. 3 boda

Kako je n neparan, broj $S = \frac{(2n - 1)2n}{2} - \frac{(n - 1)n}{2} = n \cdot \frac{3n - 1}{2}$ je djeljiv brojem n . 1 bod

Također, n dijeli $S - n$. No, kao ranije posljednja relacija zajedno s $n \mid S - m$ daje kontradikciju (jer oduzimanjem slijedi da n dijeli $|m - n|$, a $0 < |m - n| < n$). 2 boda

Dobili smo kontradikciju s početnom pretpostavkom, pa vrijedi tvrdnja zadatka.

Napomena: Umjesto za tvrdnju da postoji m takav da je $x_m = n$, odgovarajuća 3 boda iz bodovne sheme ostvaruju se za bilo koju dokazanu tvrdnju da za neki broj s ploče k postoji m takav da je $x_m = k$.